运筹与优化

Operations Research & Optimization

鲁海燕

江南大学理学院

信息与计算科学系

2019-2020-2学期

Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

线性规划与单纯形法

第一章

线性规划问题的数学模型

第2节

问题的提出

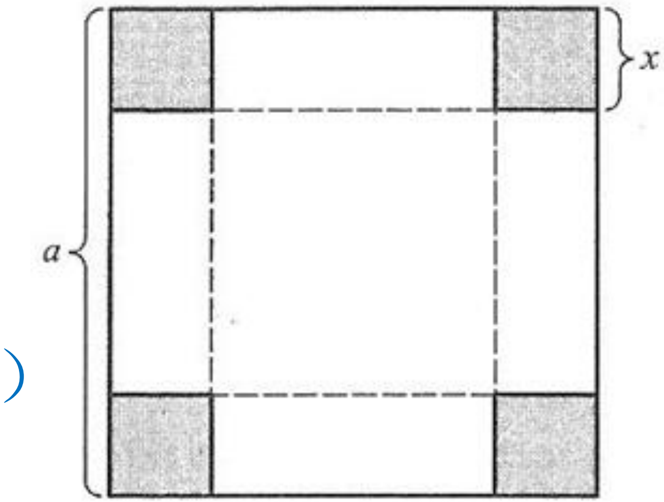
- 例 1 用一块长为a的正方形铁皮做一个容器，应如何剪裁，使做成的容器的容积为最大？
- 解：

按照一般的做法，可在铁皮四个角上剪去长各为x的正方形,折叠起来做成一个容器，容积为

$$V = (a-2x)^2 x$$

可确定x的值，使V达到最大。

（此为微积分中经典的求极值问题）



问题的提出

- 例2 常山机器厂生产I、II两种产品。这两种产品均需分别在A、B、C三种不同设备上加工。按工艺资料规定，生产单位产品所需的各设备时数如下表所示。生产I、II两种产品的获利分别为200元/件和300元/件，问该企业应如何安排生产两种产品个多少，使总的利润收入为最大？

资源＼产品	产品I	产品II	现有条件
设备A	2台时/件	2台时/件	12台时
设备B	4台时/件	0	16台时
设备C	0	5台时/件	15台时
产品获利	2百元/件	3百元/件	

问题的提出

产品 资源	产品I	产品II	现有条件
设备A	2台时/件	2台时/件	12台时
设备B	4台时/件	0	16台时
设备C	0	5台时/件	15台时
产品获利	2百元/件	3百元/件	

- 解：

设x_1、x_2分别表示I、II两种产品在计划期内的产量，用z表示利润。按照给定的约束条件,，该计划问题可用数学模型表示为：

目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \qquad\quad \le 16 \\ \qquad 5x_2 \le 15 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

设备A的约束条件

设备B的约束条件

设备C的约束条件

变量自身的约束

max：maximize的缩写，“最大化”，

$s.t.$: subject to的缩写，“受限制于……”

线性规划问题

- 规划问题的数学模型包含三个要素：
  - 决策变量：决策者为实现规划目标采取的方案、措施，是问题中要确定的未知量；
  - 目标函数：问题要达到的目的、要求，表示为决策变量的函数；
  - 约束条件：决策变量取值时受到的各种可用资源的限制，表示为含决策变量的等式或不等式。

- 线性规划问题的数学模型：决策变量为可控的连续变量，目标函数和约束条件均为线性。

线性规划问题

- 定义
  - 对于求取一组变量$x_j(j=1,2.\cdots,n)$，使之既满足线性约束条件，又具有线性目标函数并取极值的一类最优化问题称为**线性规划问题**。
  - 线性规划问题中，决策变量为连续变量，目标函数和约束条件左端均为线性函数。

线性规划问题的数学模型

- 代数形式（展开式）

$$
\max(\min)\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n
$$

$$
s.t.\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=,\ge) b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (=,\ge) b_2 \\
\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=,\ge) b_m \\
x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0 \left(\le 0, \boxed{\text{自由}}\right)
\end{cases} \tag{1.1}
$$

即：无约束

其中：c_j, b_i, a_{ij}为模型的参数，c_j为价值系数，b_i为约束条件右端项（表示第i种资源的拥有量），a_{ij}为工艺系数或技术系数（表示生产第j种单位产品时第i种资源的消耗量）。

线性规划问题的数学模型

- 代数形式（紧缩式）

$$\max(\min)z=\sum_{j=1}^{n}c_j\,x_j$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_j\le(=,\ge)b_i & (i=1,\dots,m)\\ x_j\ge(=,\le)0 & (j=1,\dots,n)\end{cases}\qquad(1.2)$$

线性规划问题的数学模型

- 向量形式

$$\max(\min) z = cX$$
$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \leq (=, \geq) b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

其中 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

线性规划问题的数学模型

- 矩阵形式

$$\max(\min) z = cX$$
$$s.t.\begin{cases} AX \leq (=, \geq) b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad (1.4)$$

其中 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ （一般有$m < n$ ）

称为约束方程组变量的系数矩阵，简称为系数矩阵，也可称为技术系数矩阵。

线性规划模型的有关假设

- 线性规划模型是建立在以下隐含的重要假设基础之上的：
  - 比例性(proportionality)每个决策变量$x_j(j=1,2,\ldots,n)$在约束条件中以及在目标函数中数值变化时，按x_j对应的技术系数a_{ij}与价值系数c_j严格地成比例变化。
  - 可加性(additivity)：目标函数总值是各组成部分值$(c_j x_j)$之和；第i个约束关系式中各组成部分值$(a_{ij}x_j)$之和是第i项资源需求的总值。决策变量是独立的，相互之间没有关联和交叉。

    Linearity 线性
  - 可分性(divisibility)：决策变量具有可分性，即允许取非整数值（可以取小数、分数或任一实数）。
  - 确定性(deterministic)：模型中的参数均为确定的常数。

线性规划问题的两种重要形式

- 正则形式(Canonical form)和标准形式(Standard Form)

	MINIMIZATION PROBLEM	MAXIMIZATION PROBLEM
STANDARD FORM	Minimize $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\quad i = 1,\ldots,m$ $x_j \geq 0,\quad j = 1,\ldots,n.$	Maximize $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\quad i = 1,\ldots,m$ $x_j \geq 0,\quad j = 1,\ldots,n.$
CANONICAL FORM	Minimize $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\quad i = 1,\ldots,m$ $x_j \geq 0,\quad j = 1,\ldots,n.$	Maximize $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\quad i = 1,\ldots,m$ $x_j \geq 0,\quad j = 1,\ldots,n.$

线性规划问题的标准形式

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

- 标准形式的主要特征：
  - 1、目标函数为求最大值（有的书上规定为求最小值）；
  - 2、资源约束条件全为等式；
  - 3、决策变量x_j的取值均为非负。
  - 4、资源约束条件右端常数项b_i均为非负值；

线性规划问题的标准形式

- 化非标准形式为标准形式
  - （1）目标函数为求最小值

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

求min z等价于求max (-z)，故令$z' = -z$，可化为：

$$\max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j = \sum_{j=1}^{n} (-c_j)\, x_j$$

线性规划问题的标准形式

- 化非标准形式为标准形式
  - （2）约束条件为不等式
    - 若约束方程为“≤”不等式，则在相应不等式的左端加入一个**非负松弛变量**，把原“≤”不等式变为等式；
    - 若约束方程为“≥”不等式，则在相应不等式的左端减去一个**非负剩余变量**（也可称松弛变量），把原“≥”不等式变为等式。

（**注意**：**松弛变量或剩余变量**在实际问题中表示未被利用的资源和超出的资源量，**均未转化为价值和利润**，因此其在目标函数中的系数均为**零**。）

线性规划问题的标准形式

- 化非标准形式为标准形式
  - （3）存在取值无约束变量（即自由变量）x_k

令$x_k = x'_k - x''_k$，其中$x'_k, x''_k \geq 0$，将其代入模型即可。

  - （4）变量$x_j \leq 0$：

令$x'_j = -x_j$，显然$x'_j \geq 0$.

  - （5）约束条件右端项有$b_i < 0$

只需将等式或不等式两端同乘以“-1”，则约束右端项大于零。

线性规划问题的标准形式

- 例3 将下述线性规划问题化为标准形式

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3\text{取值无约束} \end{cases}$$

线性规划问题的标准形式

- （例3）解：

令$z' = -z$， $x_3 = x'_3 - x''_3$（$x'_3, x''_3 \geq 0$），$x'_1 = -x_1$，得上述线性规划问题的标准形式为

$$\max z' = x'_1 - 2x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t.\begin{cases} 2x'_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 9 \\ 3x'_1 + x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 - x_5 = 4 \\ 3x'_1 + 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 = 6 \\ x'_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

课堂练习

- 将下述线性规划问题化为标准形式

$$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \text{ 为无约束} \end{cases}$$

课 堂 练 习

- 解：

步骤如下

(1) 用 x_4-x_5 替换 x_3，其中 $x_4,x_5\geqslant 0$；

(2) 在第一个约束不等式≤号的左端加入松弛变量 x_6；

(3) 在第二个约束不等式≥号的左端减去剩余变量 x_7；

(4) 令 $z'=-z$，把求 $\min z$ 改为求 $\max z'$，即可得到该问题的标准型

$$\max z'=x_1-2x_2+3(x_4-x_5)+0x_6+0x_7$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+(x_4-x_5)+x_6 = 7 \\ x_1-x_2+(x_4-x_5)-x_7=2 \\ -3x_1+x_2+2(x_4-x_5) = 5 \\ x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

课 堂 讨 论

- 将下述线性规划问题化为标准形式

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \le 20 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 12 \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0, 2 \le x_3 \le 6 \end{cases}$$

课 堂 讨 论

注意：在进行相应的变量替换时必须要满足决策变量之间相互独立性，即变量相互之间没有关联和交叉。

- 解：

首先考察变量，令$x'_3 = x_3 - 2$，则$2 \le x_3 \le 6$化为

$$x'_3 \ge 0，\ x'_3 \le 4$$

此时目标函数化为 $z = 2x_1 - x_2 + x'_3 + 2$

再令 $z' = z - 2$，并引入松弛变量和剩余变量，得到该线性规划问题的标准形式为

$$\max z' = 2x_1 - x_2 + x'_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x'_3 + x_4 = 22 \\ 2x_1 - x_2 + x'_3 - x_5 = 10 \\ x_1 - 4x_2 - 4x'_3 - x_6 = 10 \\ x'_3 + x_7 = 4 \\ x_1, x_2, x'_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

将$x'_3 \le 4$作为约束条件

谢谢！

Thank you!