运筹学

第3章 对偶理论与灵敏度分析

3.1 对偶问题的提出

3.2 原问题与对偶问题的关系

3.3 对偶问题的基本性质

3.4 对偶单纯形法

3.5 灵敏度分析 （一）

3.6 灵敏度分析 （二）

3.4 对偶单纯形法

前节讲到原问题与对偶问题的解之间的对应关系时指出：在单纯形表迭代时，在b列中得到的是原问题的基可行解，而在检验行得到得到的是对偶问题的基解。
通过逐步迭代，当在检验数行得到对偶问题的解也是基可行解时，则得到原问题和对偶问题的最优解。

x_B	b	x	x_S
基变量	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	B^{-1}
	$-C_BB^{-1}b$	$C-C_BB^{-1}A$	$-C_BB^{-1}$

X_B	X_N	X_S
0	$C_N-C_BB^{-1}N$	$-C_BB^{-1}$
Y_{S1}	$-Y_{S2}$	$-Y$

根据对偶问题的对称性

- 若保持对偶问题的解是基可行解，即$c_j-C_BB^{-1}P_j \le 0$，而原问题在非可行解的基础上，通过逐步迭代达到基可行解，这样也得到了最优解。
- 其优点是原问题的初始解不一定是基可行解，可从非基可行解开始迭代。
- 缺点：要求所有检验数小于或等于零。

设原问题 $\max z=CX$

$$AX=b$$

$$X\geq 0$$

- 又设B是一个基。不失一般性，令$B=(P_1, P_2, \dots, P_m)$，它对应的变量为 $X_B=(x_1, x_2, \dots, x_m)$
- 当非基变量都为零时，可以得到$X_B=B^{-1}b$。若在$B^{-1}b$中至少有一个负分量，设$(B^{-1}b)_i<0$，并且在单纯形表的检验数行中的检验数都为非正，即对偶问题保持可行解.

(1) 对应基变量$x_1, x_2, \dots, x_m$的检验数是

$$\sigma_i=c_i-z_i=c_i-C_BB^{-1}P_i=0，\quad i=1,2,\dots,m$$

(2) 对应非基变量$x_{m+1}, \dots, x_n$的检验数是

$$\sigma_j=c_j-z_j=c_j-C_BB^{-1}P_j\leq 0, \qquad j=m+1,m+2,\cdots,n$$

- 每次迭代是将基变量中的负分量x_l $(l=1,2,\dots,m)$取出，去替换非基变量中的x_k $(k=m+1,m+2,\dots,n)$。经基变换，所有检验数仍保持非正。从原问题来看，经过每次迭代，原问题由非可行解往可行解靠近。当原问题得到可行解时，便得到了最优解。

对偶单纯形法的计算步骤如下：

(1) 根据线性规划问题，**列出初始单纯形表**。检查b列的数字，若都为非负，检验数都为非正，则已得到最优解。停止计算。

若检查b列的数字时，至少还有一个负分量，检验数保持非正，那么进行以下计算。

(2) **确定换出变量**

按$\min\{(B^{-1}b)_i \mid (B^{-1}b)_i < 0\} = (B^{-1}b)_l$对应的基变量$x_l$为**换出变量**

(3) **确定换入变量**

在单纯形表中检查x_l所在行的各系数α_{lj} (j=m+1,m+2,…，n)。若所有$\alpha_{lj}\geq 0$，则无可行解，停止计算。

若存在$\alpha_{lj}<0$ (j=m+1,…,n),计算

$$\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right) = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$$

按θ规则所对应的列的非基变量x_k为**换入变量**，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

$$b_l = x_l + a_{l,m+1}x_{m+1} + a_{l,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{l,n}x_n$$

$$b_l < 0, \text{而} a_{l,m+1}, a_{l,m+2}, \cdots, a_{l,n} \geq 0, \text{则不可能} x_i \geq 0$$

对偶单纯形法的计算步骤如下：

(1) 根据线性规划问题，**列出初始单纯形表**。检查b列的数字，若都为非负，检验数都为非正，则已得到最优解。停止计算。

若检查b列的数字时，至少还有一个负分量，检验数保持非正，那么进行以下计算。

(2) **确定换出变量**

按$\min\{(B^{-1}b)_i \mid (B^{-1}b)_i < 0\} = (B^{-1}b)_l$对应的基变量$x_l$为**换出变量**

(3) **确定换入变量**

在单纯形表中检查x_l所在行的各系数α_{lj} (j=m+1,m+2,…，n)。若所有$\alpha_{lj} \geq 0$，则无可行解，停止计算。

若存在$\alpha_{lj} < 0$ (j=m+1,…,n),计算

$$\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right) = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$$

按θ规则所对应的列的非基变量x_k为**换入变量**，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

l行	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$a_{l,m+1}$	$\cdots$	$a_{l,k}$	$\cdots$	$a_{l,n}$
检验数	$\boxed{c_{m+1} - z_{m+1} - \frac{a_{l,m+1}}{a_{l,k}}(c_k - z_k) \leq 0}$					$c_{m+1} - z_{m+1}$	$\cdots$	$c_k - z_k$	$\cdots$	$c_n - z_n$

对偶单纯形法的计算步骤如下：

(1) 根据线性规划问题，**列出初始单纯形表**。检查b列的数字，若都为非负，检验数都为非正，则已得到最优解。停止计算。

若检查b列的数字时，至少还有一个负分量，检验数保持非正，那么进行以下计算。

(2) **确定换出变量**

按$\min\ \{(B^{-1}b)_i \mid (B^{-1}b)_i < 0\} = (B^{-1}b)_l$对应的基变量$x_l$为**换出变量**

(3) **确定换入变量**

在单纯形表中检查x_l所在行的各系数α_{lj} (j=m+1,m+2,…，n)。若所有$\alpha_{lj}\geq 0$，则无可行解，停止计算。

若存在$\alpha_{lj} < 0$ (j=m+1,…,n),计算

$$\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right) = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$$

按θ规则所对应的列的非基变量x_k为**换入变量**，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

(4) 以α_{lk}为主元素，按原单纯形法在表中进行迭代运算，得到新的计算表。

重复步骤(1) ~ (4)。

单纯形法：始终保持原问题的可行性，

$b \geq 0$,

$\sigma = C - C_B B^{-1} A (C-YA)$**由正变负**，

得到原问题和对偶问题的最优解。

对偶单纯形法：始终保持对偶问题的可行性，

$YA \geq C$ （$C-YA=C-C_B B^{-1} A \leq 0$）

即

$\sigma = C - C_B B^{-1} A \leq 0$,

原问题**从非可行解开始**，逐步迭代到基可行解。

例 用对偶单纯形法求解

$$\min \omega=2x_1+3x_2+4x_3$$
$$x_1+2x_2+x_3\geq 3$$
$$2x_1-x_2+3x_3\geq 4$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0$$

解 先将此问题化成下列形式，以便得到对偶问题的初始可行基

$$\max z=-2x_1-3x_2-4x_3$$
$$-x_1-2x_2-x_3+x_4 \qquad =-3$$
$$-2x_1+x_2-3x_3 \qquad +x_5=-4$$
$$x_j\geq 0,\ j=1,2,\ldots,5$$

初始单纯形表为

$c_j\rightarrow$			-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	[-2]	1	-3	0	1
c_j-z_j			-2	-3	-4	0	0

检验数行对应的对偶问题的解是可行解。因*b*列数字为负，故需进行迭代运算

$c_j \to$			-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	[-2]	1	-3	0	1
c_j-z_j			-2	-3	-4	0	0

换出变量的确定：

按$\min\{(B^{-1}b)_i \,/\, (B^{-1}b)_i < 0\} = (B^{-1}b)_l$对应的基变量$x_l$为换出变量。计算

$$\min(-3,-4)=-4$$

故x_5为换出变量。

换入变量的确定：

在单纯形表中检查x_l所在行的各系数$\alpha_{lj}(j=1,2,\ldots,n)$。若所有$\alpha_{lj}\geq 0$，则无可行解，停止计算。

计算

$$\boxed{\theta = \min\left(\frac{-2}{-2}, -, \frac{-4}{-3}\right) = \frac{-2}{-2} = 1}$$

故x_1为换入变量。换入、换出变量的所在列、行的交叉处“-2”为主元素。按单纯形法计算步骤进行迭代。

X5为换出变量，x_1为换入变量。换入、换出变量的所在列、行的交叉处“-2”为主元素。按单纯形法计算步骤进行迭代，得：

$c_j \to$			−2	−3	−4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	−1	0	[−5/2]	1/2	1	−1/2
−2	x_1	2	1	−1/2	3/2	0	−1/2
c_j-z_j			0	−4	−1	0	−1

由上表看出，对偶问题仍是可行解，而b列中仍有负分量。故重复上述迭代步骤，得下表

$c_j \to$			−2	−3	−4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
−3	x_2	2/5	0	1	−1/5	−2/5	1/5
−2	x_1	11/5	1	0	7/5	−1/5	−2/5
c_j-Z_j			0	0	−9/5	−8/5	−1/5

上表中b列数字全为非负， ……的最优解为

$X^*=(1$ ……

若对应两个约束条件的对 ……偶问题的最优解为

X_B	X_N	X_S
0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$
Y_{S1}	$-Y_{S2}$	$-Y$

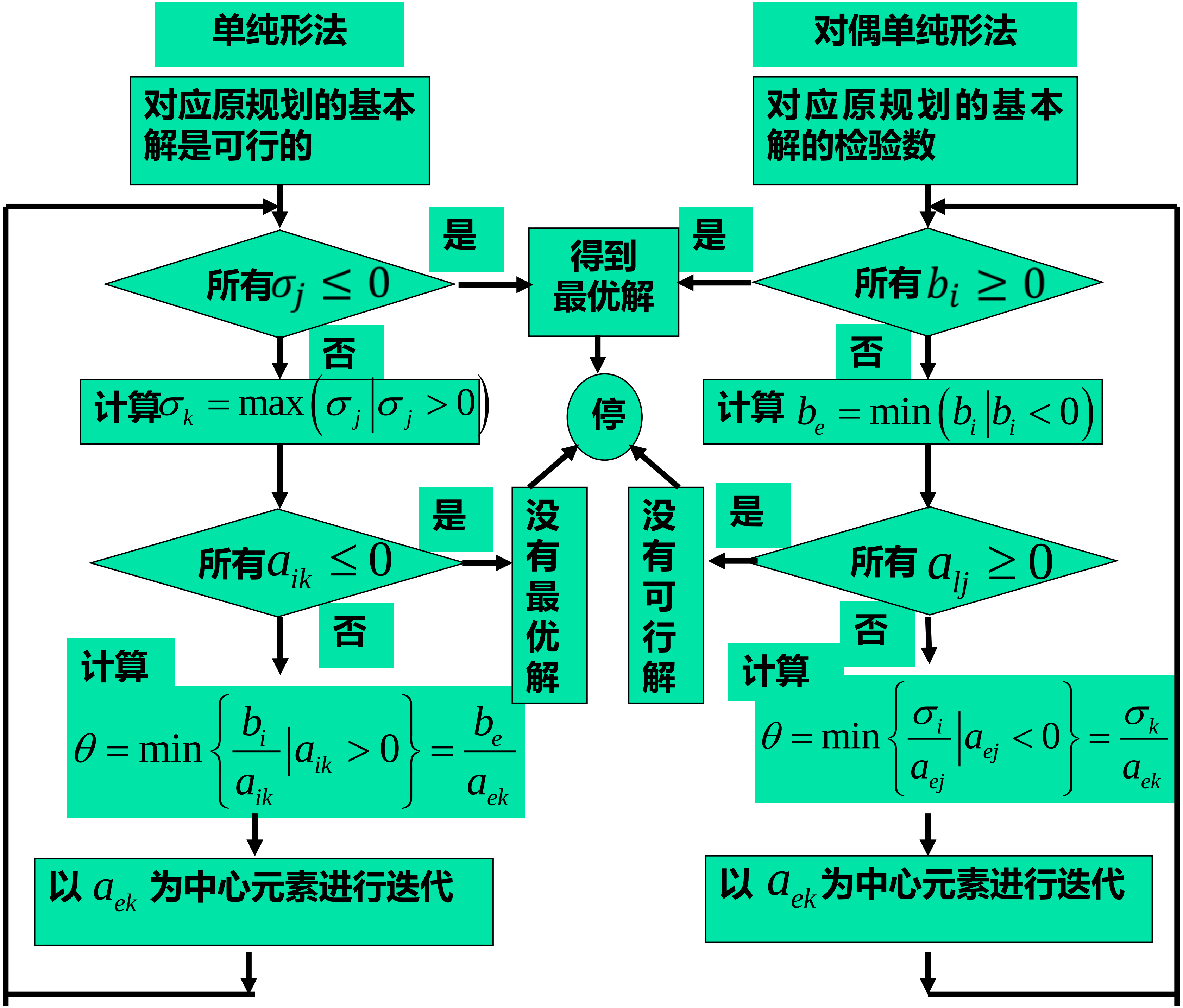
$$Y^*=(y_1^*, y_2^*)=(8/5,1/5)$$

从以上求解过程可以看到对偶单纯形法有以下优点：

(1) 初始解可以是非可行解，当检验数都为负数时就可以进行基的变换，这时不需要加入人工变量，因此可以简化计算。

(2) 当变量多于约束条件，对这样的线性规划问题用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量，因此对变量较少，而约束条件很多的线性规划问题，可先将它变换成对偶问题，然后用对偶单纯形法求解。

(3) 在灵敏度分析及求解整数规划的割平面法中，有时需要用对偶单纯形法，这样可使问题的处理简化。对偶单纯形法的局限性主要是，对大多数线性规划问题，很难找到一个初始可行基，因而这种方法在求解线性规划问题时很少单独应用。



单纯形法
对偶单纯形法
对应原规划的基本解是可行的
对应原规划的基本解的检验数
所有$\sigma_j \le 0$
是
得到最优解
是
所有$b_i \ge 0$
否
否
计算$\sigma_k = \max\left(\sigma_j \middle| \sigma_j > 0\right)$
停
计算 $b_e = \min\left(b_i \middle| b_i < 0\right)$
是
没有最优解
没有可行解
是
所有$a_{ik} \le 0$
所有 $a_{lj} \ge 0$
否
否
计算
$\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right\} = \frac{b_e}{a_{ek}}$
计算
$\theta = \min\left\{\frac{\sigma_i}{a_{ej}} \middle| a_{ej} < 0\right\} = \frac{\sigma_k}{a_{ek}}$
以 a_{ek} 为中心元素进行迭代
以 a_{ek} 为中心元素进行迭代