排队论

第十章

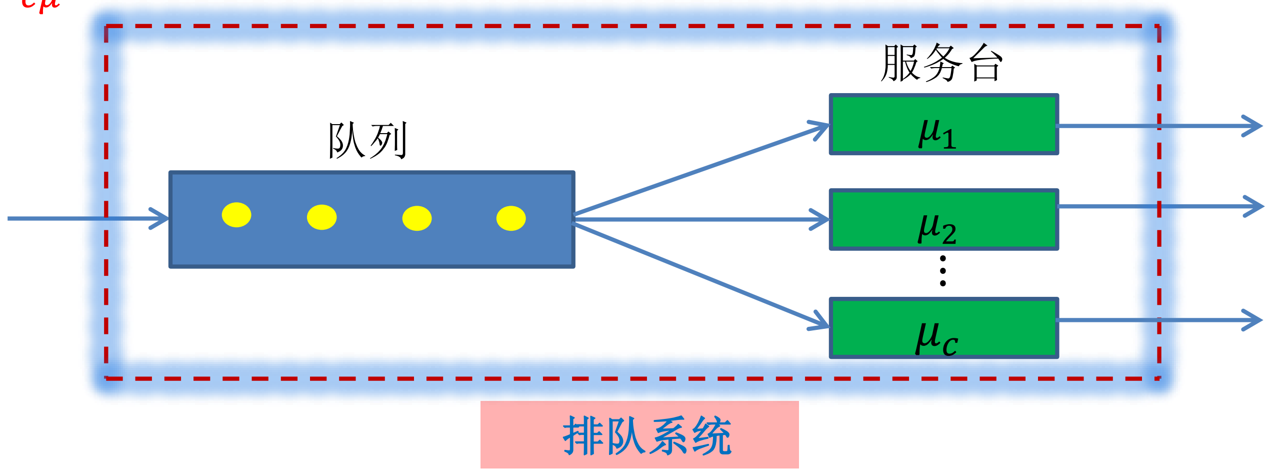
多服务台负指数分布排队系统的分析

第5节

Haiyan Lu 5/28/2020
Jiangnan University

$M/M/c/\infty/\infty$ 模型

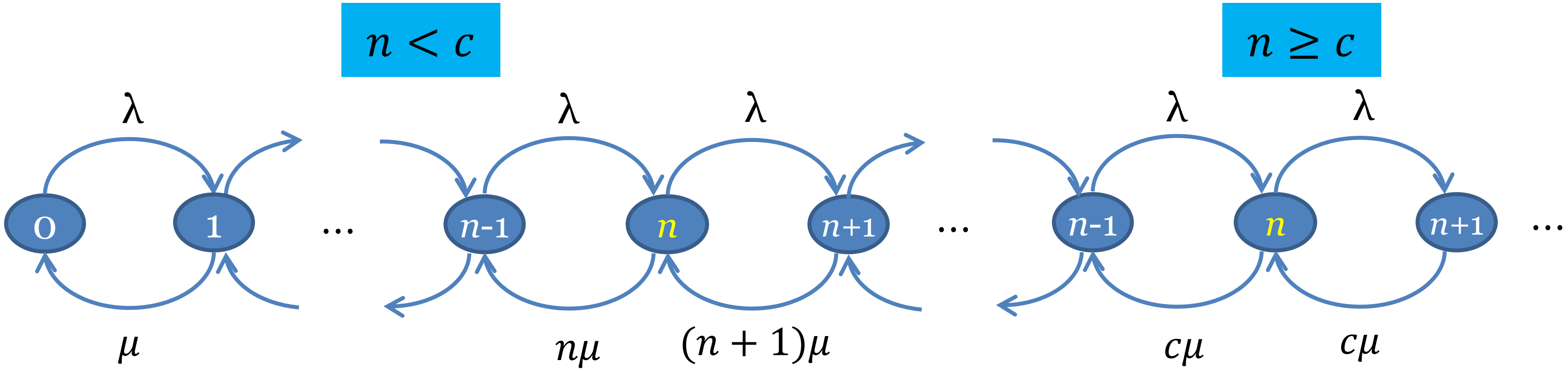
- 模型概述
  - 除并联的服务台数为c 外， $M/M/c/\infty/\infty$ 模型与$M/M/1/\infty/\infty$ 模型的其余规定相同。
  - 另外，规定各服务台工作是相互独立的，且平均服务率相同，即$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_c=\mu$.
  - 整个服务机构的服务率为$\begin{cases} c\mu, & \text{当}n\geq c\text{时} \\ n\mu, & \text{当}n<c\text{时} \end{cases}$
  - $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}$ (<1)称为这个系统的服务强度，或称为服务机构的平均利用率。



Haiyan Lu
Jiangnan University

$M/M/c/\infty/\infty$ 模 型

- 模型求解
  - 系统的状态转移关系图



  - 系统各状态的平衡方程

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0 \\ (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + n\mu)P_n \quad (1 \leq n < c) \\ c\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + c\mu)P_n \quad (n \geq c) \end{cases}$$

其中， $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$, 且$\rho < 1$（否则队列将排至无限远）.

$M/M/c/\infty/\infty$ 模型

- 模型求解
  - 系统的(稳态)状态概率

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}} \\ P_n = \dfrac{(c\rho)^n}{n!}P_0 \quad (n=1,2,\dots,c) \\ P_n = \dfrac{(c\rho)^n}{c!c^{n-c}}P_0 \quad (n=c,c+1,\dots) \end{cases}$$

其中$\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$。(若$\rho\geq 1$，则稳态不存在。)

  - 系统中所有服务台都繁忙(即顾客到达后必须等待)的概率

$$P(n\geq c)=\frac{(c\rho)^c}{c!\,(1-\rho)}P_0$$

$M/M/c/\infty/\infty$ 模型

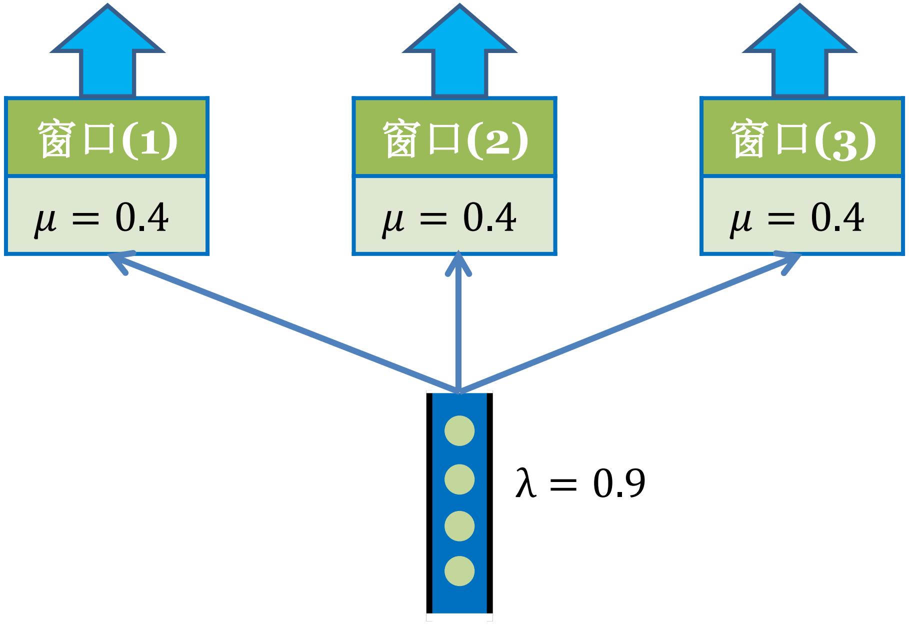
- 模型求解
  - 系统的运行指标

$$\begin{cases} L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)P_n = \frac{(c\rho)^c\rho}{c!(1-\rho)^2}P_0 = \frac{P(n\geq c)\rho}{1-\rho} \\ L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \\ W_s = \frac{L_s}{\lambda} \\ W_q = \frac{L_q}{\lambda} \end{cases}$$

  - 备注
    - 当需要计算L_s, L_q, W_s或W_q时，可先计算出$P(n \geq c)$，然后再根据上述公式计算相应指标。
    - 由于模型中计算P_0比较复杂，现已有专门的数值表(关于c和 ρ)可供使用。

$M/M/c/\infty/\infty$ 模型

- 例4 某售票处有3个窗口，顾客的到达服从泊松过程，平均到达率每分钟0.9人，服务（售票）时间服从负指数分布，平均服务率每分钟0.4人。假设顾客到达后排成一队，依次向空闲的窗口购票。
- 分析：此即一个$M/M/c/\infty/\infty$系统，其中 $c=3,\ \lambda=0.9,\ \mu=0.4,$ $\lambda/\mu=2.25$，$\rho=\frac{\lambda}{c\mu}=0.75(<1).$



$M/M/c/\infty/\infty$ 模型

- (例4)解：
  - 整个售票处空闲的概率

$$P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}}=0.0748$$

  - 顾客到达后必须等待的概率

$$P(n\geq c)=\frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}P_0=\frac{(2.25)^3}{3!(1-0.75)}\times 0.0748=0.57$$

  - 平均队列长

$$L_q=\frac{P(n\geq c)\rho}{1-\rho}=0.57\times\frac{0.75}{1-0.75}=1.71$$

  - 平均队长

$$L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}=1.71+2.25=3.96$$

  - 平均逗留时间

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{3.96}{0.9}=4.4(\text{分钟})$$

  - 平均等待时间

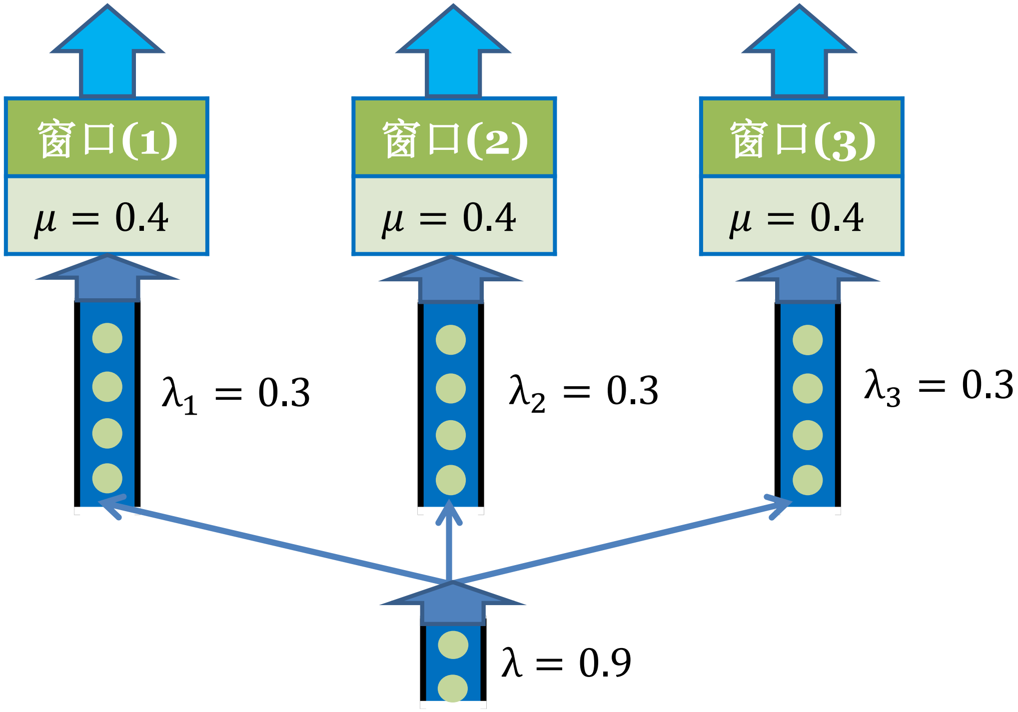
$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{1.71}{0.9}=1.9(\text{分钟})$$

$M/M/c$型系统和c个$M/M/1$型系统的比较

- 例5 将例4中的系统修改如下：除排队方式外其他条件不变，但顾客到达后在每个窗口前各排一队，且进入队列后坚持不变。这样就形成三个队列(见下图)，而每个队列平均到达率为：

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.9/3 = 0.3(\text{分钟})$$

因此，原来的$M/M/3$型系统就变成了有3个$M/M/1$型子系统的系统。



$M/M/c$型系统和c个$M/M/1$型系统的比较

- (例5)解：
  - 按$M/M/1$型解决该问题，并与例4中的$M/M/3$型作比较，结果见下表：

指标	模型	
	$M/M/3$型	$M/M/1$型
服务台空闲的概率P_0	0.0748	0.25 (每个子系统)
顾客必须等待的概率	0.57	0.75
平均队列长L_q	1.71	2.25 (每个子系统)
平均队长L_s	3.96	9.00 (整个系统)
平均逗留时间W_s(分钟)	4.4	10
平等待时间W_q(分钟)	1.9	7.5

  - 从上表可看出：单队（$M/M/3$型）比三队（3个$M/M/1$型）有显著优越性，在安排排队方式时应该注意。

$M/M/c$型系统和c个$M/M/1$型系统的比较

- (例5)解：
  - 备注：

    例5中$M/\ M\ /1$型的计算：

    - 对于每个子系统，λ=0.3，$\mu = 0.4$，$\rho = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$；
    - 每个子系统空闲的概率 $P_0 = 1 - \rho = 1 - 0.75 = 0.25$；
    - 顾客必须等待的概率 $1 - P_0 = 1 - 0.25 = 0.75$；
    - 平均队列长 $L_q = \frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda} = 2.25$；
    - 平均队长（整个系统）$3L_s = 3 \times \frac{\rho}{1-\rho} = 3 \times 3 = 9$；
    - 平均逗留时间 $W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = 10$；
    - 平均等待时间 $W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 7.5$.

Haiyan Lu 5/28/2020
Jiangnan University

$M/M/c/N/\infty$ 模型

- 模型概述
  - 系统的容量最大限制为$N(\geq c)$，当系统中顾客数n已达到N时，再来的顾客即被拒绝，其他条件同$M/M/c/\infty/\infty$ 模型。
- 模型求解
  - 系统的状态概率

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{c}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{c^c\rho(\rho^c-\rho^N)}{c!(1-\rho)}} \\ P_n = \dfrac{(c\rho)^n}{n!}P_0 \qquad (n=0,1,2,\dots,c) \\ P_n = \dfrac{c^c\rho^n}{c!}P_0 \quad (n=c,c+1,\dots,N) \end{cases}$$

其中$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}\neq 1$。

  - **备注：**
    - 在本模型中不必对ρ加以限制。
    - $\rho=1$时的概率公式需另行计算。
    - 由于公式计算复杂，现在已有一些专门的图表可供使用。

Haiyan Lu 5/28/2020
Jiangnan University

$M/M/c/N/\infty$ 模型

- 模型求解
  - 系统的运行指标

$$\begin{cases} L_q = \dfrac{(c\rho)^c \rho P_0}{c!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{N-c}-(N-c)\rho^{N-c}(1-\rho)\right] \\ L_s = L_q + \dfrac{\lambda_{\text{eff}}}{\mu} \\ W_s = \dfrac{L_s}{\lambda_{\text{eff}}} \\ W_q = \dfrac{L_q}{\lambda_{\text{eff}}} \end{cases}$$

其中，$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(1-P_N)$为系统的**有效到达率**。

  - 备注
    - 当$N=c$时即为损失制的情形。

Haiyan Lu
Jiangnan University

$M/M/c/N/\infty$ 模型

- 模型求解
  - $N=c$ 时(损失制)系统的状态概率

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{c}\frac{(c\rho)^k}{k!}} \\ P_n = \dfrac{(c\rho)^n}{n!}P_0 \quad (n=1,2,\dots,c) \end{cases}$$

其中， $n=c$ 时关于P_c的公式称为**爱尔朗损失公式**。

  - $N=c$ 时(损失制)系统的运行指标

$$\begin{cases} L_q = 0 \\ L_s = \sum_{n=1}^{c} nP_n = c\rho(1-P_c) \\ W_s = \dfrac{1}{\mu} \\ W_q = 0 \end{cases}$$

L_s也为正在使用的服务台数的期望值。

$M/M/c/\infty/m$ 模型

- 模型概述
  - 顾客总体(顾客源)为有限数m，且$m > c$，与$M/M/1/\infty/m$一样，**顾客的到达率λ按每个顾客来考虑**。
  - 以**机器因故障停机待修问题**为例来说明：
    - 设共有m台机器（顾客总体由m台机器构成），机器因故障停机表示“到达”，待修的机器形成单个队列，c个修理工人即为c个服务员。
    - **每个顾客的到达率λ**是指每台机器每单位运转时间出故障的期望次数。
    - 同一台机器出了故障（到来）并经修好后（服务完成）仍可再出故障。
    - c个修理工人的修理技术相同，修理(服务)时间**均**服从参数为μ的负指数分布。
    - 故障机器的修复时间和正在生产的机器是否发生故障是相互独立的。
  - 模型符号$M/M/c/\infty/m$中第四项为∞，表示对系统的容量没有限制，但实际上它不会超过m，该模型符号又可写成$M/M/c/m/m$.

Haiyan Lu
Jiangnan University

$M/M/c/\infty/m$ 模型

- 模型求解
  - 系统的状态概率

$$P_0=\frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{\sum_{k=0}^{c}\frac{1}{k!(m-k)!}\left(\frac{c\rho}{m}\right)^k+\frac{c^c}{c!}\sum_{k=c+1}^{m}\frac{1}{(m-k)!}\left(\frac{\rho}{m}\right)^k}$$

$$P_n=\frac{m!}{(m-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P^0 \quad (1\le n\le c)$$

$$P_n=\frac{m!}{(m-n)!c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P^0 \quad (c\le n\le m)$$

其中，$\rho=\frac{m\lambda}{c\mu}$.

$M/M/c/\infty/m$ 模型

- 模型求解
  - 系统的运行指标

$$\begin{cases} L_q = \sum_{n=c+1}^{m}(n-c)P_n \\ L_s = \sum_{n=1}^{m} nP_n = L_q + \frac{\lambda_{\mathrm{eff}}}{\mu} \\ W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\mathrm{eff}}} \\ W_q = \frac{L_q}{\lambda_{\mathrm{eff}}} \end{cases}$$

其中，$\lambda_{\mathrm{eff}} = \lambda(m - L_s)$为系统的有效到达率。

  - 备注:
    - 由于计算过于复杂，有专门的数值表格可供使用。

Haiyan Lu 5/28/2020
Jiangnan University

$M/M/c/\infty/m$ 模型

- 例6 设有两个修理工人，负责5台机器的正常运行，每台机器平均损坏率为每运转小时1次，两工人能以相同的平均修复率4台/小时修好机器。求：(1)等待修理的机器平均数；(2)需要修理的机器平均数；(3)有效损坏率；(4)等待修理时间；(5)停工时间。
- 解：
  - 此为$M/M/c/\infty/m$ 模型：$m=5, c=2, \lambda=1$ (次/小时), $\mu=4$(台/小时)。

$$P_0=\frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{\sum_{k=1}^{c}\frac{1}{k!(m-k)!}\left(\frac{c\rho}{m}\right)^k+\frac{c^c}{c!}\sum_{k=c+1}^{m}\frac{1}{(m-k)!}\left(\frac{\rho}{m}\right)^k}=0.3149$$

$$P_1=0.394, P_2=0.197, P_3=0.074, P_4=0.018, P_5=0.002$$

  - (1) $L_q=P_3+2P_4+3P_5=0.118$
  - (2) $L_s=\sum_{n=1}^{m}nP_n=1.094$
  - (3) $\lambda_{\text{eff}}=\lambda(m-L_s)=3.906$
  - (4) $W_q=\frac{L_q}{\lambda_{\text{eff}}}=0.03$(小时)
  - (5) $W_s=\frac{L_s}{\lambda_{\text{eff}}}=0.28$(小时)

Thank you!

谢 谢！