运筹与优化
Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

线性规划与单纯形法

第一章

单纯形法原理

第4节

线性规划问题的解

$$\max Z = CX$$
$$s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- 设线性规划问题的**标准形式**为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.6a}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, \dots, m) \quad (1.6b) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, \dots, n) \quad (1.6c) \end{cases}$$

- 可行解：满足约束条件（1.6b）和（1.6c）的解称为线性规划问题的可行解。
- 可行解集：所有可行解构成的集合。
- 可行域：可行解集构成的n维空间的区域。
- 最优解：使目标函数（1.6a）达到最优值的可行解称为最优解。

线性规划问题的解

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2,m+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 基：设A为约束方程组（1.6b）的$m\times n$阶系数矩阵（设$m<n$），其秩为m。设B是A的一个$m\times m$阶满秩子矩阵，则称B为线性规划问题的一个基，即基B由A的m个线性无关的列向量组成。

不妨设 $B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mm} \end{pmatrix}=(P_1,P_2,\cdots,P_m) \qquad (|B|\neq 0)$

对于基B，B中的列向量$P_1, P_2, \ldots, P_m$称为基向量，A中其余向量$P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_n$为非基向量；

基向量对应的变量$x_1, x_2, \ldots, x_m$称为基变量，非基向量对应的变量$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$称为非基变量。

线性规划问题的解

- 基解：在约束线性方程组$AX=b$中，对应于基$B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$，令所有非基变量为0，由于$AX=b$中基变量的个数等于方程的个数m，又$|B|\neq 0$，由克莱默法则，可得该方程组的唯一解

$$X=(\overbrace{x_1,x_2,\cdots,x_m}^{\text{基变量}},\overbrace{0,0,\cdots,0}^{\text{非基变量}})^T$$

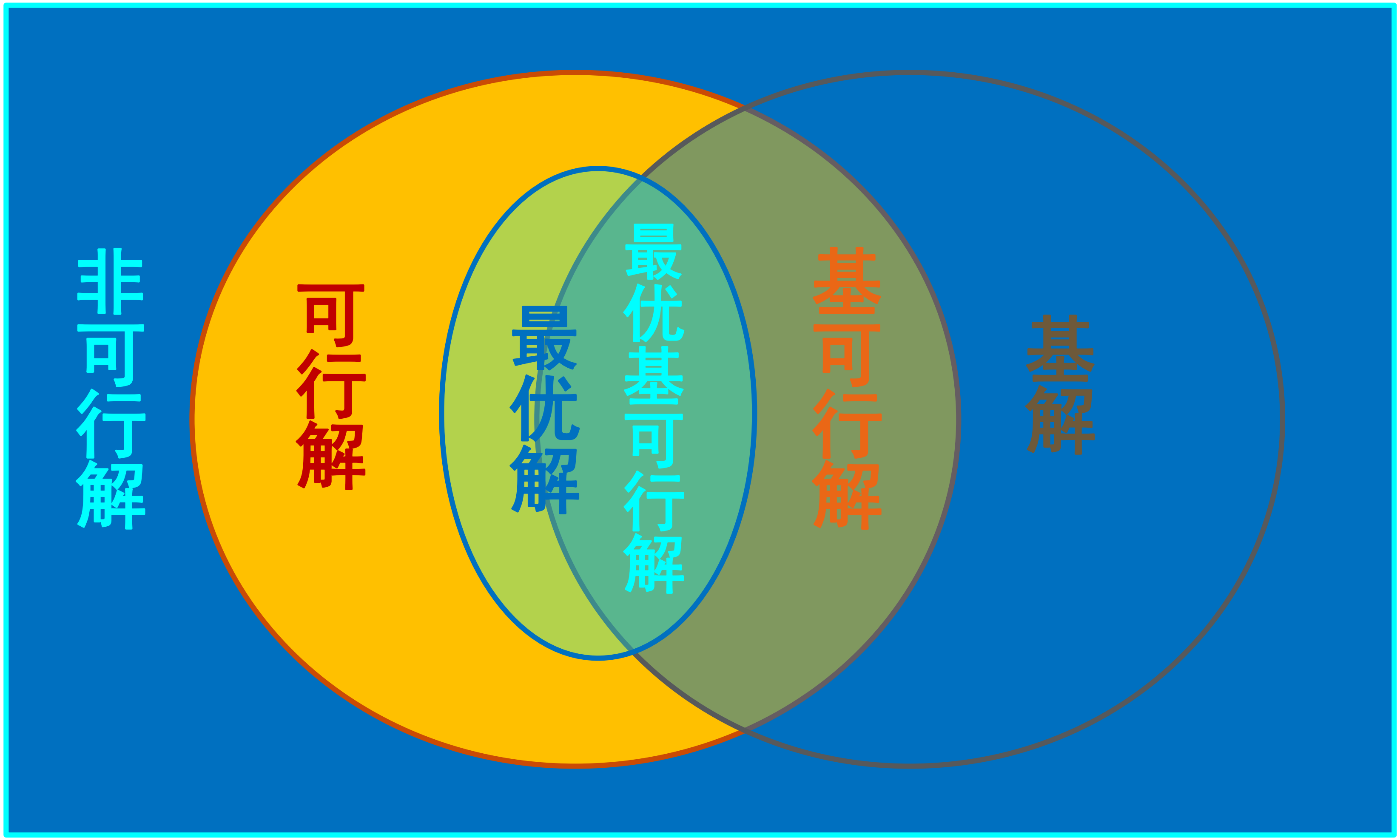
称X为线性规划问题的（一个）基解。

  - 备注
    - 基解中变量取非零值的个数≤约束方程个数$\boldsymbol{m}$。
    - 基的个数 = 基解的个数 $\leq C_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!m!}$。

线性规划问题的解

- 基可行解：满足变量非负约束条件(1.6c) 的基解称为基可行解。
- 可行基：对应于基可行解的基称为可行基。
- 最优基可行解和最优基：使目标函数达到最优的基可行解为最优基可行解，对应于最优基可行解的基为最优基。
- 退化的基(可行)解：非零分量的个数小于m的基(可行)解，即：有一个或多个基变量取零值的基(可行)解。

线性规划问题的解



线性规划问题的解

- 例4 列出下述线性规划问题的全部基、基解、基可行解，找出最优基可行解，并指出这些基解分别位于问题可行域边界所在直线的哪些交点上。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \le 16 \\ 5x_2 \le 15 \\ x_1, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例2所示线性规划

线性规划问题的解

- 解：

将该线性规划问题化为标准形式

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 5x_2 + x_5 = 15 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

线性规划问题的解

- 解：

约束方程组的系数矩阵为

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \\
A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

显然A的秩为3，找出A的所有3×3阶满秩子矩阵，从而得到A的全部基。

对应每个基，求解方程组可得相应基解，从而容易判断出哪些基解为基可行解，并得到最优基可行解。

线性规划问题的解

- 解：

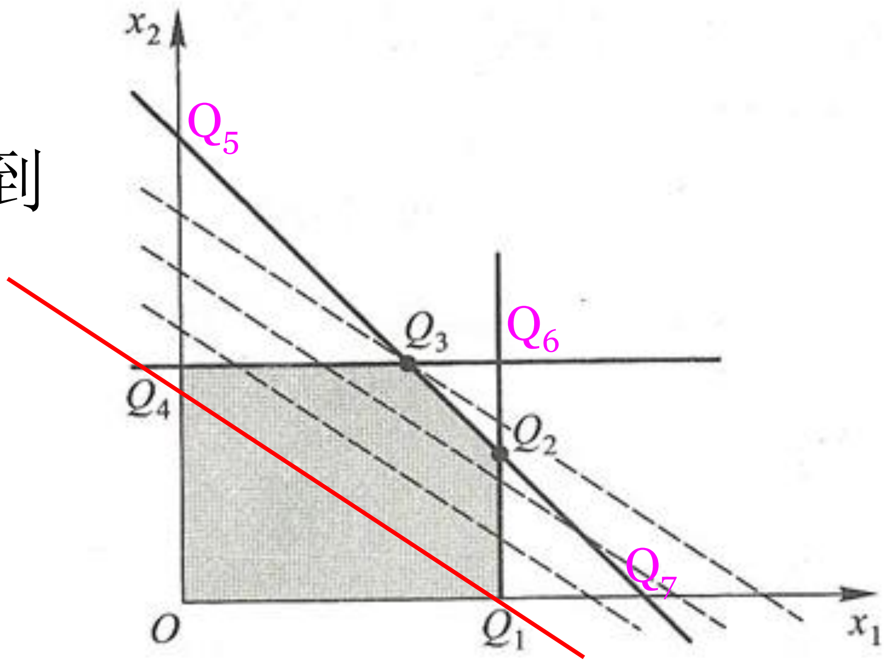
求得的全部基解见下表（*表示最优基可行解）

基			基解					基可行解？	目标函数值
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
P_1	P_2	P_3	4	3	-2	0	0	否	17
P_1	P_2	P_4	3	3	0	4	0	是	15*
P_1	P_2	P_5	4	2	0	0	5	是	14
P_1	P_3	P_5	4	0	4	0	15	是	8
P_1	P_4	P_5	6	0	0	-8	15	否	12
P_2	P_3	P_4	0	3	6	16	0	是	9
P_2	P_4	P_5	0	6	0	16	-15	否	18
P_3	P_4	P_5	0	0	12	16	15	是	0

线性规划问题的解

- 解：

用图解法求解得到（见右图）

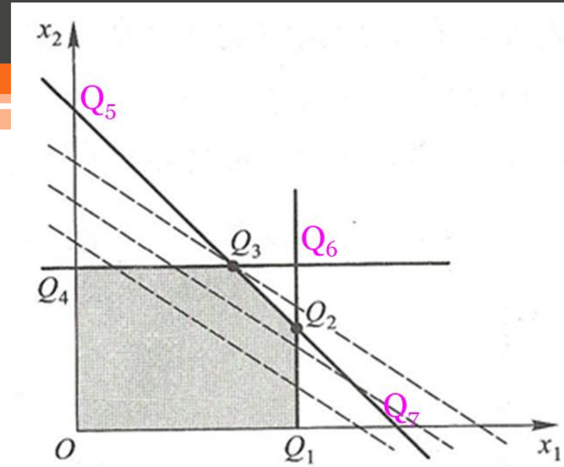


基解：可行域顶点O, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4和边界延长线交点Q_5, Q_6, Q_7。

基可行解：可行域顶点O, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4对应基可行解。

最优基可行解：Q_3，即$(x_1, x_2) = (3,3)$.

线性规划问题的解



- 解：

基、基解与图解法中各交点对应如下：

基			基解					基可行解?	目标函数值	交点
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
P_1	P_2	P_3	4	3	-2	0	0	否	17	Q_6
P_1	P_2	P_4	3	3	0	4	0	是	15*	Q_3
P_1	P_2	P_5	4	2	0	0	5	是	14	Q_2
P_1	P_3	P_5	4	0	4	0	15	是	8	Q_1
P_1	P_4	P_5	6	0	0	-8	15	否	12	Q_7
P_2	P_3	P_4	0	3	6	16	0	是	9	Q_4
P_2	P_4	P_5	0	6	0	16	-15	否	18	Q_5
P_3	P_4	P_5	0	0	12	16	15	是	0	O

凸集及其顶点

从直观上讲，凸集没有凹陷，其内部没有空洞。

- 凸集
  - 设C为n维欧式空间R^n中一个点集，若集合C中任意两点X_1、X_2连线上所有点也都是集合C中的点，则称C为凸集。

凸集定义的数学描述：

- 设C为n维欧式空间的一个点集，若对任意$X_1 \in C$、$X_2 \in C$，有

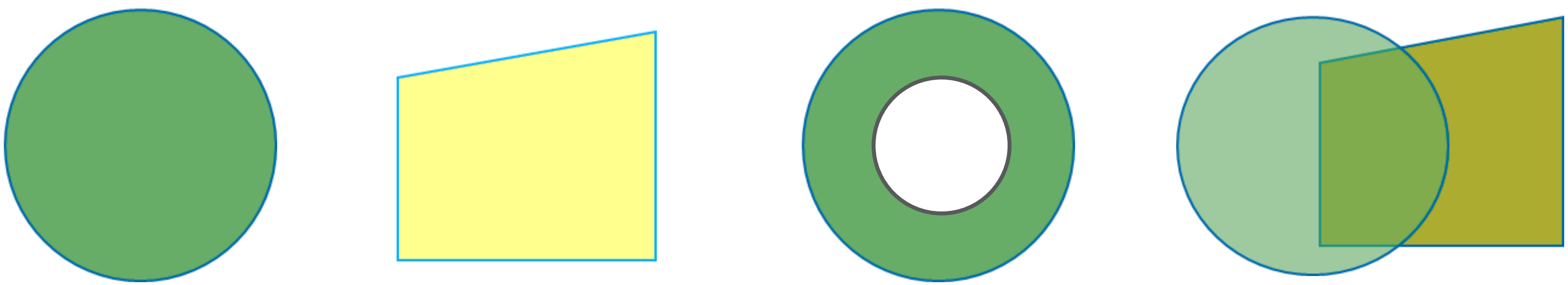
$$aX_1 + (1-a)X_2 \in C \qquad (0 \le a \le 1)$$

则称C为凸集。

这些点中也包括了X_1、X_2两点。

凸集及其顶点

- 凸集
  - 举例：判断下列集合哪些是凸集，哪些不是凸集？



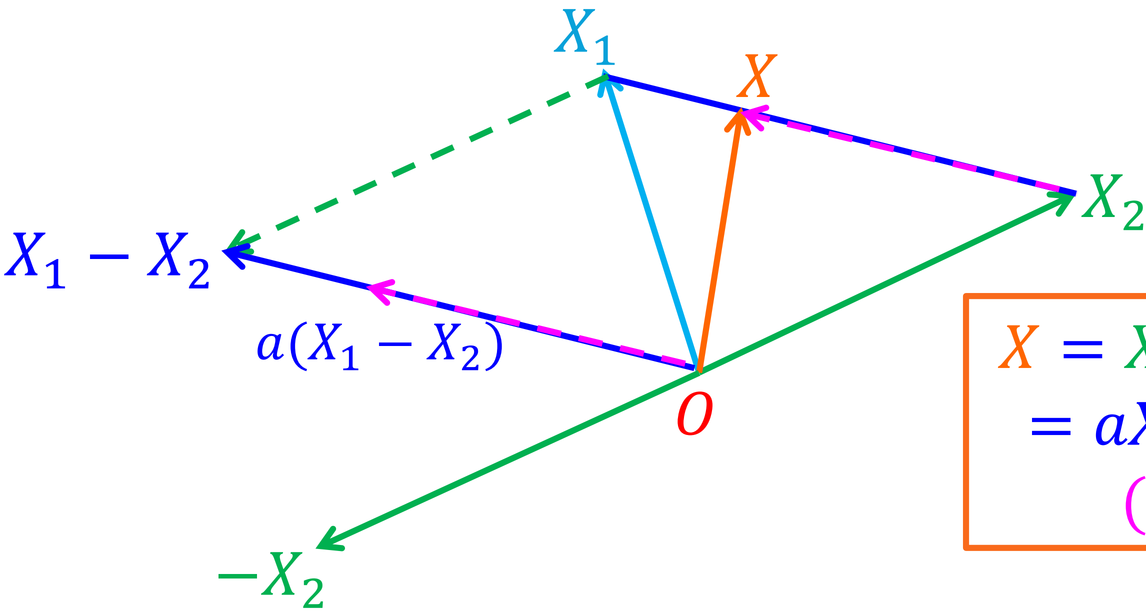
凸集　　凸集　　非凸集　　凸集（交集）

凸集及其顶点

X_1、X_2两点连线上的点$aX_1+(1-a)X_2$ $(0\le a\le 1)$称为X_1、X_2的**凸组合**；
若$0<a<1$，则称相应的组合为**严格凸组合**。

- **备注**

(1) 设X_1、X_2为欧式空间中两个点，则X_1、X_2连线上所有点都可表示为$aX_1+(1-a)X_2$ $(0\le a\le 1)$。



$$X=X_2+a(X_1-X_2)$$
$$=aX_1+(1-a)X_2$$
$$(0\le a\le 1)$$

(2) 任意个凸集的交集仍为凸集。

凸集及其顶点

- 凸组合
  - 设$X_1, X_2, \ldots, X_k$是n维欧式空间中的k个点，若存在$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, 0 \leq \mu_i \leq 1\ (i = 1,2, \ldots k)$, 且$\sum_i^1 \mu_i = 1$, 使得

$$X = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \cdots + \mu_k X_k$$

则称X为$X_1, X_2, \ldots, X_k$的凸组合。

（当 $0 < \mu_i < 1$ 时，称为严格凸组合。）

  - 备注

有界凸集中任意一点都可表示成该凸集顶点的凸组合。

凸集及其顶点

即：若凸集C中的点X不能表示为C中两个不同点连线内的一点，则称点X称为凸集C的顶点。

- 顶点
  - 凸集C中满足下述条件的点X称为**顶点**：

如果C中不存在任何两个不同的点X_1，X_2，使X成为这两个点连线内的一点。

也可表述为：

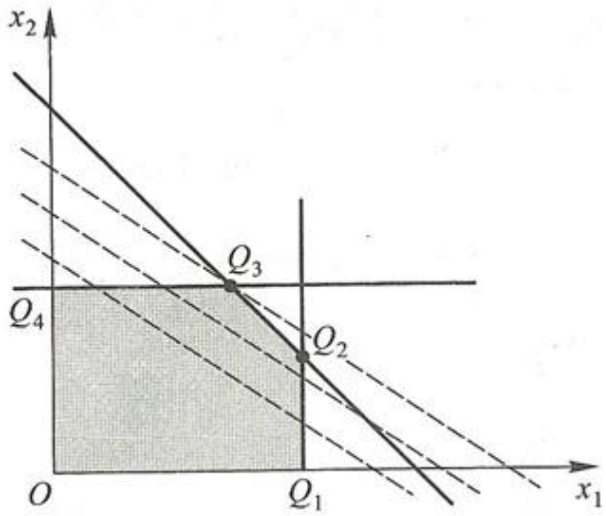
- 设C为凸集，$X \in C$；若点X不能表示为C中不同两点X_1和X_2的严格凸组合

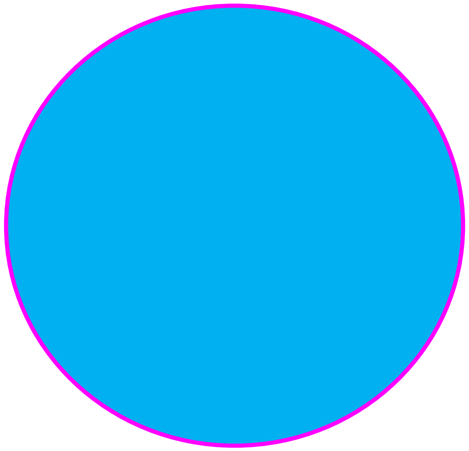
$$X = aX_1 + (1-a)X_2,\ (0 < a < 1)$$

则称X为C的一个**顶点**（或**极点**、**角点**）。

凸集及其顶点

- 顶点
  - 举例
    - 下图(左图)所示线性规划问题可行域为一个有界凸多边形，其边界线的各交点O, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4都是顶点。
    - 圆盘(右图)边界（即圆周）上的点都是顶点。





基本定理

- **定理1** 若线性规划问题存在可行解，则其可行域是凸集。

- **思路**：

  按凸集定义，只需证明可行域中任意两点连线上的点仍在可行域中即可。

基本定理

- 证明：

设线性规划问题的可行域为

$$D=\{X \mid \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b,\ x_j \geq 0,\ j=1,\cdots n\}$$

设

$X^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})^T, X^{(2)}=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_n^{(2)})^T$

为D中任意两点，代入约束条件，则有

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j^{(1)} = b, \quad x_j^{(1)} \geq 0\ (j=1,\cdots n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j^{(2)} = b, \quad x_j^{(2)} \geq 0\ (j=1,\cdots n)$$

基本定理

- 证明：

令$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为$X^{(1)}$和$X^{(2)}$连线上任意一点, 即

$$X=aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)} \quad (0\le a\le 1)$$

X的每一个分量为$x_j=ax_j^{(1)}+(1-a)x_j^{(2)}$，将其代入约束条件，得到

$$\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=\sum_{j=1}^{n}P_j[ax_j^{(1)}+(1-a)x_j^{(2)}]$$
$$=a\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(2)}-a\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(2)}$$
$$=ab+b-ab=b$$

又因为$x_j^{(1)}$，$x_j^{(2)}\ge 0, a\ge 0, 1-a\ge 0$，故$x_j\ge 0, j=1,\cdots n$.
因此$X\in D$，从而 D是凸集。

基本定理

- **引理** 线性规划问题的可行解$X=(x_1,\cdots,x_n)^T$为基可行解的充要条件是X的正分量所对应的系数列向量线性无关。
- **证明**：

  必要性：由基可行解的定义知显然成立。

  充分性：不妨设可行解X的正分量所对应的系数列向量为$P_1,\cdots,P_k$.

  若向量$P_1,\cdots,P_k$线性无关，则必有$k\le m$（因为$R(A)$=m）.

  当$k=m$时，向量$P_1,\cdots,P_k$恰好构成一个基，从而可行解$X=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)^T$为基可行解；

  当$k<m$时，则一定可以从其余列向量中找出$m-k$个向量与$P_1,\cdots,P_k$构成一个基，其对应的解恰为可行解X，由定义可知它为基可行解。

基本定理

> 引理 线性规划问题的可行解$X=(x_1,\cdots,x_n)^T$为基可行解的充要条件是X的正分量所对应的系数列向量线性无关。

- **定理2** 线性规划问题的基可行解对应线性规划问题的可行域顶点。

> 线性规划问题可行域的一个点是基本可行解当且仅当它是可行域的一个顶点。

- **证明:**

本定理需要证明： X是基可行解$\Leftrightarrow$ X是可行域顶点。

分两步来证明。

(1)要证: X是基可行解$\Longrightarrow$$X$是可行域顶点。

设X是基可行解，不失一般性，设X的前m个分量为正，即

$X=(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$，从而有

$$P_1x_1+\cdots+P_mx_m=b$$

其中$P_1,\cdots P_m$是线性规划系数矩阵A的前m个列，且$P_1,\cdots P_m$线性无关（引理）。

下面证明X是可行域顶点。

基本定理

- **证明：**

用**反证法。**假设X不是可行域D的顶点，则D中存在不同的两点Y、Z及实数$a\in(0,1)$，使得$X=aY+(1-a)Z$，即

$$x_j=ay_j+(1-a)z_j\ (j=1,\cdots,m,m+1,\cdots,n)$$

对于$j=m+1,\cdots,n$，由于$x_j=0, y_j, z_j$非负，$a\in(0,1)$，故必有

$$y_j=z_j=0$$

又$AY=AZ=b$，故有

$$P_1y_1+\cdots+P_my_m=b$$
$$P_1z_1+\cdots+P_mz_m=b$$

从而有

$$P_1(y_1-z_1)+\cdots+P_m(y_m-z_m)=0.$$

由于$y_1-z_1,\ldots,y_m-z_m$不全为零，故$P_1,\cdots P_m$线性相关，与之前所得结论$P_1,\cdots P_m$线性无关**矛盾**，因此X是可行域D的顶点。

Jiang

基本定理

引理 线性规划问题的可行解$X=(x_1,\cdots,x_n)^T$为基可行解的充要条件是X的正分量所对应的系数列向量线性无关。

- **证明：**

(2)要证：X是可行域顶点$\Longrightarrow X$是基可行解。

设X是可行域D的一个顶点，不妨设X的其前r个分量大于0，则有$X=(x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0)^T$，$AX=b$，故有

$$P_1x_1+\cdots+P_rx_r=b$$

下面证明$P_1,\cdots P_r$线性无关，用**反证法**。

假设$P_1,\cdots P_r$线性相关，则必存在一组不全为零的数$\delta_1,\ldots,\delta_r$,使得

$$P_1\delta_1+\cdots+P_r\delta_r=0$$

令$Y=(\delta_1,\ldots,\delta_r,0,\ldots,0)^T$，则由$x_1,\cdots,x_r>0$知，可选择充分小的正数$\varepsilon$，使**相异两点**$X+\varepsilon Y$与$X-\varepsilon Y$均**属于**$D$，显然此时$X$可表示为 $X=\frac{1}{2}(X+\varepsilon Y)+\frac{1}{2}(X-\varepsilon Y)$，即$X$表示为$X+\varepsilon Y$与$X-\varepsilon Y$的**严格凸组合**，这与$X$为顶点相**矛盾**，故$P_1,\cdots P_r$线性无关，从而由前述**引理**可知，$X$是基可行解。

备注：$C\varepsilon Y=0$说明向量Y与目标函数等值超平面族的法线C垂直，而$C\left(X^{(0)}+\varepsilon Y\right)=C\left(X^{(0)}-\varepsilon Y\right)=CX^{(0)}$则说明这三个点在同一超平面上。

基本定理

- **定理3** 若线性规划问题有最优解，则一定存在一个基可行解是最优解。
- **证明：**

设$X^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T$是线性规划的一个最优解，$Z=CX^{(0)}$是目标函数的最大值。

若$X^{(0)}$不是基可行解，则由**定理2**可知，$X^{(0)}$不是顶点，从而$X^{(0)}$可表示为**可行域中**相异两点$X^{(0)}+\varepsilon Y$与$X^{(0)}-\varepsilon Y$的严格凸组合，这两点的目标函数值分别为$C(X^{(0)}+\varepsilon Y)$与$C\left(X^{(0)}-\varepsilon Y\right)$。

由于$CX^{(0)}$为目标函数最大值，故

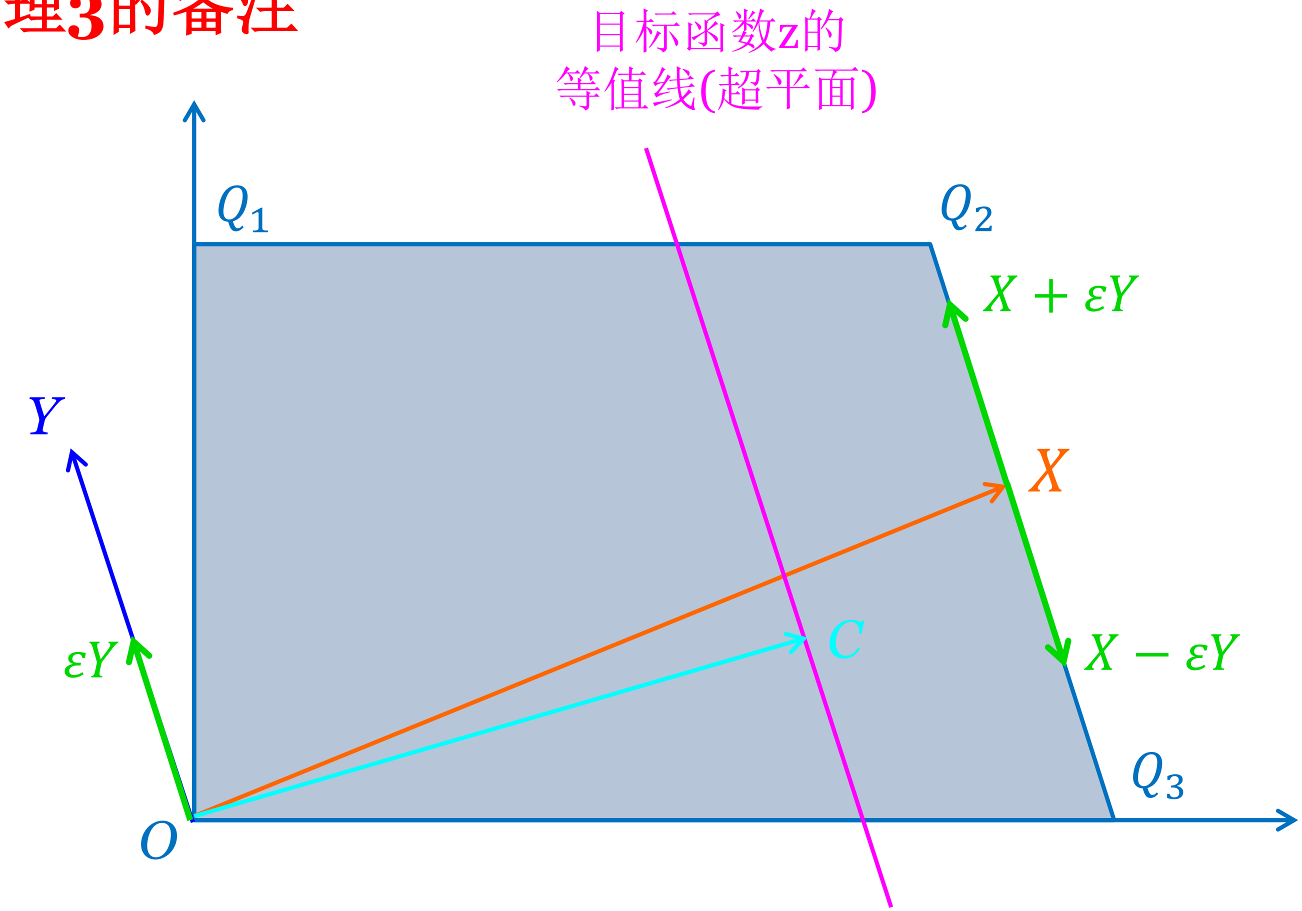
$$CX^{(0)}\geq C(X^{(0)}+\varepsilon Y),\quad CX^{(0)}\geq C(X^{(0)}-\varepsilon Y)$$

因此$C\varepsilon Y=0$，即有$C\left(X^{(0)}+\varepsilon Y\right)=C\left(X^{(0)}-\varepsilon Y\right)=CX^{(0)}$。

若$X^{(0)}+\varepsilon Y$或$X^{(0)}-\varepsilon Y$仍不是基可行解，则重复上述步骤，最后一定可以找到一个基可行解，其目标函数值为$CX^{(0)}$，从而该基可行解是最优解。

基本定理

- **定理3的备注**


目标函数z的
等值线(超平面)
Q_1
Q_2
$X + \varepsilon Y$
Y
X
εY
C
$X - \varepsilon Y$
Q_3
O

单纯形法的基本思想

- 由前述基本定理可知：若线性规划问题有最优解，则一定有一个基可行解是最优解。

具体而言：

- 若可行域有界，则线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优。
  - 若目标函数在多个顶点处达到最优，则在这些顶点的凸组合上也达到最优（有无穷多最优解）。
- 若可行域为无界，则线性规划问题可能无最优解，也可能有最优解，若有也必定可在某顶点上得到。

单纯形法的基本思想

- 枚举法
  - 虽然顶点数目有限($\leq C_n^m$)，采用**枚举法**找到所有基可行解，然后一一比较，最终可以找到最优解，但当n，m较大时，枚举法则行不通。

- 单纯形法
  - 对于线性规划问题的**标准形式**，先找到一个**初始基可行解**，若该解不是最优解，则设法转换(**迭代**)到另一个目标函数更优的基可行解；重复上述步骤，直到找到最优解为止。

初始基可行解的确定

- 直接观察法
  - 如果可能，从线性规划问题的标准型中直接观察到一个初始可行基（单位矩阵）。
- 松弛变量法
  - 若所有约束条件都是“≤”形式的不等式，可用化标准型的方法得到由松弛变量的系数所构成的单位矩阵作为初始可行基。
- 人工变量法
  - 若上述两种方法不能奏效，则对于“≥”型不等式约束，左端减去一个非负的剩余变量后，再加上一个非负的人工变量；对于等式约束，左端加上一个非负的人工变量，这样总能得到一个单位矩阵，作为初始可行基。

初始基可行解的确定

给定线性规划问题

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i & (i=1,\dots,m)\\ x_j \ge 0 & (j=1,\dots,n)\end{cases}$$

其标准形式为

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j + 0\sum_{i=1}^{m} x_{si}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{si} = b_i & (i=1,\dots,m)\\ x_j, x_{si} \ge 0 & (j=1,\dots,n)\end{cases}$$

注意：这里要求$b_i \ge 0$

初始基可行解的确定

上述标准形式中约束方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(设A的秩为m)

取其中的单位矩阵 $(P_{s1},\cdots,P_{sm})$ 作为初始可行基，可求得相应的初始基可行解$X=(0,\cdots,0,b_1,\cdots,b_m)^T$.

当线性规划约束条件为“$=$”或“$\geq$”型时，化为标准形式后，一般约束条件的系数矩阵中不包含单位矩阵，这时可通过添加人工变量来人为地构造一个单位阵矩作为初始可行基，称为人工基，从而得到一个初始基可行解。

基可行解的转换

定义：两个基可行解称为是相邻的，若它们之间变换且仅变换一个基变量。

设初始基可行解为$X^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T$，不妨设其前$m$个变量为基变量，且对应的基矩阵为**单位阵**，故$X^{(0)}$可表示为

$$X^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_m^{(0)},\overbrace{0,\dots0}^{n-m\text{个}})^T$$

对应的约束方程组的**增广矩阵**为

$$\begin{array}{cccccccccc} P_1 & P_2 & \cdots & P_m & P_{m+1} & \cdots & P_j & \cdots & P_n & b \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,j} & \vdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

基可行解的转换

非基向量由基向量组来线性表示

显然有 $\sum_{i=1}^{m} P_i x_i^{(0)} = b$ 和 $P_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} P_i = 0$ $(j \in \{m+1, \dots, n\})$

由上述两式可得：$(\sum_{i=1}^{m} P_i x_i^{(0)}) + \theta(P_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} P_i) = b$ $(\theta > 0)$

整理得 $\sum_{i=1}^{m} (x_i^{(0)} - \theta a_{ij}) P_i + \theta P_j = b$

从上式得到满足约束方程组 $\sum_{j=1}^{n} P_i x_j = b$ 的另一个顶点$X^{(1)}$，即

$$X^{(1)} = (x_1^{(0)} - \theta a_{1j}, \dots, x_m^{(0)} - \theta a_{mj}, 0, \dots, \theta, \dots, 0)^T$$

其中θ为$X^{(1)}$的第j个分量的值。

注意到$\theta > 0$，要使$X^{(1)}$成为基可行解，须使对所有$i = 1, \dots, m$，有

$$x_i^{(0)} - \theta a_{ij} \geq 0$$

且使这m个不等式中**至少有一个等号成立**（从而使原先基可行解中的一个基变量变为新的基可行解中的一个非基变量，实现相邻基可行解的转换）。

基可行解的转换

若$a_{ij} \le 0$，$x_i^{(0)} - \theta a_{ij} \ge 0$ 自然成立，故对θ的增大无限制；

若$a_{ij} > 0$，θ则不能无限制增大，应取

最小比值规则

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{x_i^{(0)}}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > 0 \right\} = \frac{x_l^{(0)}}{a_{lj}} \qquad (*)$$

从而使得

$$x_i^{(0)} - \theta a_{ij} \begin{cases} = 0 & (i = l) \\ \ge 0 & (i \ne l) \end{cases}$$

因此， $X^{(1)}$ 中正分量最多有m个，容易证明其对应的m个向量$P_1, \dots, P_{l-1}, P_{l+1}, \dots, P_m, P_j$ 线性无关，故按（*）式确定θ的值，则所得$X^{(1)}$即为一个新的基可行解。

(证明$P_1, \dots, P_{l-1}, P_{l+1}, \dots, P_m, P_j$线性无关。用反证法。假设$P_1, \dots, P_{l-1}, P_{l+1}, \dots, P_m, P_j$线性相关，则由向量线性相关性理论可知，$P_j$可由$P_1, \dots, P_{l-1}, P_{l+1}, \dots, P_m$线性表示，然而这是不可能的，因为$a_{lj} > 0$，而$a_{l1}, \dots, a_{l,l-1}, a_{l,l+1}, \dots, a_{lm}$均为0.)

最优性检验和解的判别

基可行解$X^{(0)}$和$X^{(1)}$分别对应目标函数值

$$z^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^{(0)}$$

$$z^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i^{(0)} - \theta a_{ij}) + \theta c_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^{(0)} + \theta\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right)$$

$$= z^{(0)} + \theta\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right)$$

$$= z^{(0)} + \theta\sigma_j$$

上式中, 令$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$, $\sigma_j = c_j - z_j$ (非基变量的**检验数**),

由于$\theta > 0$，故只要$\sigma_j > 0$，就有$z^{(1)} > z^{(0)}$.

最优性检验和解的判别

- **最优解的判别**

当所有非基变量的检验数$\sigma_j \le 0$，表明当前基可行解的目标函数值比相邻各基可行解的目标函数值都大，当前基可行解即为最优解。

- **无穷多最优解的判别**

当所有非基变量的检验数$\sigma_j \le 0$，又对某个非基变量x_k有$\sigma_k = 0$，且按照(*)式可以找到$\theta > 0$，则可找到另一个基可行解，其目标函数值也达到最大，从而这两点连线上的所有点都是最优解。

该条件只是给出了无穷多最优解的一种可能情形（即可以找到另一个基可行解作为最优解），还有一种情形是找不到上述的θ，即找不到另一基可行解作为最优解，此时可行域无界。

最优性检验和解的判别

- 无界解的判别

若存在某个非基变量x_j的检验数$\sigma_j > 0$，且对应列向量P_j的所有分量$a_{ij} \leq 0$，由于对任意$\theta > 0$，均有

$$x_i^0 - \theta a_{ij} \geq 0,$$

因此θ取值不受限制，可无限增大，从而目标函数值$z^{(0)} + \theta\sigma_j$可无限增大，这时线性规划问题为**无界解**。

- 无可行解的判别

（人工变量法，见后续章节）

最优性检验和解的判别

- 说明
  - 上述判别准则都是针对目标函数**最大化**的**标准形式**。
  - 当目标函数为**最小化**时，可如下处理：
    - 方法1：是将其化为**最大化**的标准形式；
    - 方法2：在上述准则中将$\sigma_j \le 0$改为$\sigma_j \ge 0$，将$\sigma_j > 0$改为$\sigma_j < 0$即可。

谢 谢！

Thank you!