运 筹 与 优 化

Operations Research & Optimization

鲁 海 燕
江 南 大 学 理 学 院
信 息 与 计 算 科 学 系
2019–2020–2 学 期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

运输问题

第三章

内容提要

- 运输问题及其数学模型
- 表上作业法
- 运输问题的进一步讨论

运输问题及其数学模型

第1节

运输问题的数学模型

- 在实际应用中，有很多线性规划问题的约束矩阵具有特殊的结构，可以利用这种结构找到比单纯形法更简便的方法求解，从而节约大量的计算时间和费用。
- 运输问题(Transportation Problem)就是一种具有特殊结构的线性规划问题。

运输问题的数学模型

- **例1** 益民食品公司经销的主要产品之一是糖果。它下面设有三个加工厂，生产的糖果运往四个地区的门市部销售。该公司每天的产销平衡表和从产地到销地的单位运价表见下面的表格。问该食品公司应如何调运，在满足各门市部销售需要的情况下，使得总运费为最少？

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

产销平衡表（吨）

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

单位运价表（元/吨）

运输问题的数学模型

- **已知**：有m个产地$A_i, i = 1, \dots, m$，可供应某种物资，其供应量(产量)分别为$a_i, i = 1, \dots, m$；有n个销地$B_j, j = 1, \dots, n$，其需要量(销量)分别为$b_j, j = 1, \dots, n$；从A_i到B_j运输单位物资的运价(单位运价)为c_{ij}. 这些数据可汇总于产销平衡表和单位运价表(二者可合二为一)。
- **问**：如何安排从A_i到B_j的运输量x_{ij}，使得总运费为最小？

产地 \ 销地	1	2	$\cdots$	n	产量
1					a_1
2					a_2
$\vdots$		x_{ij}			$\vdots$
m					a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

产销平衡表

产地 \ 销地	1	2	$\cdots$	n
1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}
2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}
$\vdots$			$\vdots$	
m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}

单位运价表

运输问题的数学模型

- 设x_{ij}表示第i个产地到第j个销地的物资的单位数量，则**在产销平衡的条件下**，使总运费最小的运输问题的模型可表示为如下的数学形式：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

产销平衡运输问题的数学模型

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1, \cdots, n \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

其矩阵形式：

$$\min z = CX$$

$$s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

含$m \times n$个变量，$m + n$个方程；满足**产销平衡条件**：

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

运输问题的数学模型

其矩阵形式：
$$\min z = CX$$
$$s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

其中

$$X = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn})^T$$

$$C = (c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2n}, \cdots, c_{m1}, c_{m2}, \cdots, c_{mn})$$

$$b = (a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$$

$$A = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\ & & \vdots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{行} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{行} \end{array}$$

运输问题的数学模型

其对偶问题：

$$\max w = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$s.t. \quad \begin{cases} u_i + v_j \le c_{ij}, i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n \\ u_i, v_j \text{无约束}, i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

产销平衡运输问题数学模型的特点

- 产销平衡运输问题系数矩阵A的特征
  - A是一个有$m+n$行，$m\times n$列的矩阵。
  - A中x_{ij}对应的列向量$P_{ij}=e_i+e_{m+j}$。
  - A的秩为$m+n-1$，且删去A的任意一行所得的矩阵的秩恰为$m+n-1$。
    - 基矩阵的两个获取方法：

      （1）删掉矩阵A的第一行（或任意一行），从而进一步得到秩为$m+n-1$的基。

      （2）在第一个方程（或任意一个方程）中增加一个人工变量x_a，得到扩展矩阵$A^0=(A,e_1)$，从而可进一步得到秩为$m+n$的基。
  - A^0具有全幺模性(Total Unimodularity)，即其任何一个子方阵的行列式的值为$-1,0$或1。

此为运输矩阵最为重要的一个性质。

产销平衡运输问题数学模型的特点

- 产销平衡运输问题的特点
  - 运输问题一定有（有界）最优解。(Why?)
    - 首先，在产销平衡的假设下，运输问题一定存在可行解。比如：
      $$x_{ij}=\frac{a_ib_j}{\sum_{i=1}^m a_i}\left(=\frac{a_ib_j}{\sum_{j=1}^n b_j}\right), i=1,\dots,m; j=1,\dots,n$$
    - 此外，对于每一个可行解X，其任一分量都有界：
      $$0\le x_{ij}\le \min\{a_i,b_j\}$$
    - 因此，产销平衡运输问题为一个有界且有可行解的线性规划问题，因此一定有（有界）最优解。
  - 由于运输问题的系数矩阵具有特殊的结构，因此在单纯形法的基础上，设计出求解运输问题的**表上作业法**，其实质仍是单纯形法，亦称为**运输单纯形法**。

课堂练习

- 判断题

（1）运输问题是一种特殊的线性规划问题，因而求解结果也可能出现下列四种情况之一：唯一最优解、无穷多最优解、无界解、无可行解。 错

（2）表上作业法实质上就是求解运输问题的单纯形法。 对

（3） m个产地n个销地的产销平衡的运输问题中含$m+n$个约束条件，但其中总有一个是多余的。 对

谢 谢！

Thank you!