运筹学

第3章 对偶理论与灵敏度分析

3.5 灵敏度分析（一）

问题的提出

考虑线性规划的标准形

$$\max z = cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

设 B 是基，则单纯形表为

x_B	b	x
基变量	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$
	$-C_B B^{-1} b$	$C - C_B B^{-1} A$

基本解 $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是最优解的充要条件是：

$$B^{-1}b \geq 0, C - C_B B^{-1} A \leq 0$$

前面讨论的 A, b, c 都是常数，但实际上往往是估计值或预测值。例如

市场条件变化 $\rightarrow$ C 变化

工艺条件变化 $\rightarrow$ A 变化

当这些系数有一个或几个发生变化时，为了保持最优基（或最优解），这些数据变化的范围；
当这些数据的变化超出了范围，如何作微小的调整，在原有的最优基（或最优解）的基础上求出新的最优基（或最优解）。

- **显然，当线性规划问题中某一个或几个系数发生变化后，原来已得结果一般会发生变化。**
- **当然可以用单纯形法从头计算，以便得到新的最优解。这样做很麻烦，而且也没有必要。**
- **因在单纯形法迭代时，每次运算都和基变量的系数矩阵*B*有关，因此可以把发生变化的个别系数，经过一定计算后直接填入最终计算表中，并进行检查和分析**

系数发生变化后原问题与对偶问题的变化情况

原问题	对偶问题	结论或计算步骤
可行解	可行解	最优解不变
可行解	非可行解	单纯形法求解
非可行解	可行解	对偶单纯形法
非可行解	非可行解	引入人工变量

1 资源数量变化的分析

- 资源数量变化是指资源中某系数b_r发生变化，即$b_r'=b_r+\Delta b_r$。并假设规划问题的其他系数都不变。这样使最终表中原问题的解相应地变化为

$$X_B'=B^{-1}(b+\Delta b)$$

- 这里$\Delta b=(0,\dots,\ \Delta b_r,0,\dots,\ 0)^T$。只要$X_B'\geq 0$，因最终表中检验数不变，故最优基不变，但最优解的值发生了变化，所以X_B'为新的最优解。
- 新的最优解的值可允许变化范围用以下方法确定。

B^{-1} 是最终计算表中的最优基的逆

$$B^{-1}(b+\Delta b)=B^{-1}b+B^{-1}\Delta b=B^{-1}b+B^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \Delta b_r\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \Delta b_r\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{a}_{1r}\Delta b_r\\ \vdots\\ \bar{a}_{ir}\Delta b_r\\ \vdots\\ \bar{a}_{mr}\Delta b_r\end{pmatrix}=\Delta b_r\begin{pmatrix}\bar{a}_{1r}\\ \vdots\\ \bar{a}_{ir}\\ \vdots\\ \bar{a}_{mr}\end{pmatrix}$$

要求在最终表中求得的经过变化后的b列的所有元素

$$\bar{b}_i + \bar{a}_{ir}\Delta b_r \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

由此可得 $\bar{a}_{ir}\Delta b_r \ge -\bar{b}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$

当$\bar{a}_{ir} > 0$时， $\Delta b_r \ge \dfrac{-\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$

当$\bar{a}_{ir} < 0$时， $\Delta b_r \le \dfrac{-\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$

从而

$$\max_i \left\{ -\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}} \middle| \bar{a}_{ir} > 0 \right\} \le \Delta b_r \le \min_i \left\{ -\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}} \middle| \bar{a}_{ir} < 0 \right\}$$

例如求第1章例1中第二个约束条件b_2的变化范围。

$c_j \to$			2	3	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	
0	x_5	4	0	0	−2	1/2	1	
3	x_2	2	0	1	1/2	−1/8	0	
−z		−14	0	0	−3/2	−1/8	0	

例如求第1章例1中第二个约束条件b_2的变化范围。

约束条件：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	
0	x_5	4	0	0	−2	1/2	1	
3	x_2	2	0	1	1/2	−1/8	0	
−z		−14	0	0	−3/2	−1/8	0	

可计算 Δb_2:

$$B^{-1}b + B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ -1/8 \end{pmatrix}\Delta b_2 \ge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由上式，可得$\Delta b_2 \ge -4/0.25=-16$，$\Delta b_2 \ge -4/0.5=-8$，$b_2 \le 2/0.125=16$。
所以Δb_2的变化范围是［-8，16］；显然原b_2 =16，加它的变化范围后，b_2的变化范围是［8，32］。

例 从下表得知第1章例1中，每**设备台时**的影子价格为1.5元，若该厂又从其他处抽调4台时用于生产产品I，II。求这时该厂生产产品I，II的最优方案。

$c_j \to$			2	3	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	
0	x_5	4	0	0	−2	1/2	1	
3	x_2	2	0	1	1/2	−1/8	0	
−z		−14	0	0	−3/2	−1/8	0	

解 先计算$B^{-1}\Delta b$,将结果反映到最终表中，得下表

$$B^{-1}\Delta b=\begin{pmatrix}0 & 0.25 & 0\\ -2 & 0.5 & 1\\ 0.5 & -0.125 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0\\-8\\2\end{pmatrix}}$$

$c_j \to$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4+0	1	0	0	0. 25	0
0	x_5	4−8	0	0	[−2]	0. 5	1
3	x_2	2+2	0	1	0. 5	−0. 125	0
c_j-z_j			0	0	−1. 5	−0. 125	0

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4+0	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4−8	0	0	[−2]	0.5	1
3	x_2	2+2	0	1	0.5	−0.125	0
c_j-z_j			0	0	−1.5	−0.125	0

由于上表中*b*列有负数，故用对偶单纯形法求新的最优解。得下表

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_3	2	0	0	1	−0.25	−0.5
3	x_2	3	0	1	0	0	0.25
c_j-z_j			0	0	0	−0.5	−0.75

即该厂最优生产方案应改为生产4件产品I，生产3件产品II，获利

$$z^*=4\times2+3\times3=17(\text{元})$$

从上表 看出$x_3=2$，即设备还有2小时未被利用

2 目标函数中价值系数c_j的变化分析

可以分别就c_j是对应的非基变量和基变量两种情况来讨论。

(1)若c_j是**非基变量x_j的系数**，这时它在计算表中所对应的检验数是

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j \text{ 或 } \sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

当c_j变化Δc_j后，要保证最终表中这个检验数仍小于或等于零，即

$$\sigma_j' = c_j - C_B B^{-1} P_j \le 0$$

那么$c_j + \Delta c_j \le YP_j$，即$\Delta c_j$的值必须小于或等于$YP_j - c_j$，才可以满足原最优解条件。这就可以确定$\Delta c_j$的范围了。

(2) 若c_r是**基变量x_r的系数**。因$c_r \in C_B$，当c_r变化Δc_r时，就引起C_B的变化，这时

$$\begin{aligned}(C_B + \Delta C_B) B^{-1} A &= C_B B^{-1} A + (0, \quad \cdots, \quad \Delta C_r, \quad \cdots, \quad 0) \boxed{B^{-1} A} \\ &= C_B B^{-1} A + \Delta C_r \boxed{(\bar{a}_{r1}, \quad \bar{a}_{r2}, \quad \cdots, \quad \bar{a}_{rn})}\end{aligned}$$

可见，当c_r变化Δc_r后，最终表中的检验数是

$$\sigma'_j = c_j - C_B B^{-1} A - \Delta c_r \bar{a}_{rj}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

当c_r变化Δc_r后，最终表中的检验数是

$$\sigma'_j = c_j - C_B B^{-1} A - \Delta c_r \bar{a}_{rj}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

若要求原最优解不变，即必须满足 $\sigma'_j \le 0$ **于是得到**

$$\text{当}\ \bar{a}_{rj} < 0,\ \Delta c_r \le \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}};$$

$$\bar{a}_{rj} > 0,\ \Delta c_r \ge \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}};\ j = 1, 2, \cdots, n$$

Δc_r **可变化的范围是**

$$\max_j \left\{ \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}} \middle| \bar{a}_{rj} > 0 \right\} \le \Delta c_r \le \min_j \left\{ \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}} \middle| \bar{a}_{rj} < 0 \right\}$$

例 试以第1章例1的最终表为例。设基变量x_2的系数c_2变化Δc_2在原最优解不变条件下，确定Δc_2的变化范围。

解 这时第1章例1的最终计算表

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	
0	x_5	4	0	0	−2	1/2	1	
3	x_2	2	0	1	1/2	−1/8	0	
−z		−14	0	0	−3/2	−1/8	0	

便成为下表所示：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0. 25	0
0	x_5	4	0	0	−2	0. 5	1
$3+\boxed{\Delta c_2}$	x_2	2	0	1	$\boxed{0.5}$	$\boxed{-0.125}$	0
c_j-z_j			0	0	$-1.5-\boxed{\Delta c_2}\boxed{/2}$	$\boxed{\Delta c_2}\boxed{/8}-1/8$	0

$$\sigma'_j = c_j - C_B B^{-1} A - \boxed{\Delta c_r}\boxed{\bar{a}_{rj}}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

$c_j \to$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	-2	0.5	1
$3+\Delta c_2$	x_2	2	0	1	0.5	-0.125	0
c_j-z_j			0	0	$-1.5-\Delta c_2/2$	$\Delta c_2/8-1/8$	0

- **若保持原最优解，从上表的检验数行可见应有**

$$-1.5-\frac{\Delta c_2}{2}\le 0 \text{ 和 } \frac{\Delta c_2}{8}-\frac{1}{8}\le 0$$

- **由此可得$\Delta c_2 \ge -3$ 和$\Delta c_2 \le 1$。**
- **Δc_2的变化范围为 $-3 \le \Delta c_2 \le 1$。**
- **即x_2的价值系数c_2可以在［0，4］之间变化，而不影响原最优解**