运筹与优化

Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

图与网络分析

第六章

内容提要

- 图的基本概念与模型
- 树与最小生成树
- 最短路问题
- 网络最大流
- 最小费用流

图的基本概念与模型

第1节

Haiyan Lu
Jiangnan University

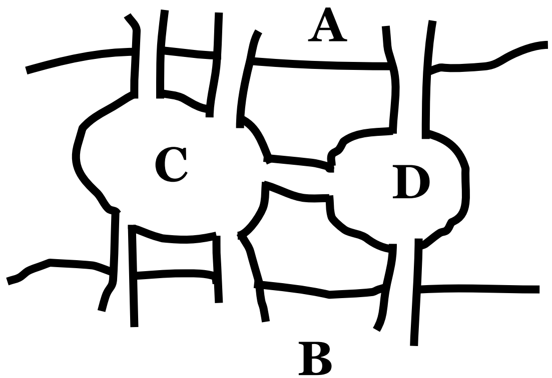
图论简史

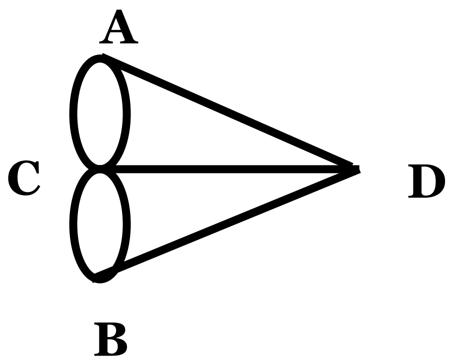
- **Graph Theory** begins in 1736, when Leonhard Euler (1707-1783) solved the well-known Königsberg Bridge Problem in one of his most famous papers , which is often cited as the earliest paper in both topology and graph theory.
  - Publication history:
    - According to the records, it was presented to the St. Petersburg Academy on August 26, 1735.
    - Euler, L.: Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 8 (1741), 128-140 =*Opera Omnia*: Series (1), Vol. 7, 1 – 10.
    - Reprinted in *Comment. acad. sc. Petrop*. 8 (1752), ed. nova, Bononiae, 116-126 + 1 diagram.
    - A handwritten French translation of this treatise can be found in the library of the observatory in Uccle, near Brussels.

“依据几何位置的解题方法”

图论简史

- 哥尼斯堡七桥问题





  - 欧拉将哥尼斯堡七桥问题(左图)归结为如下**一笔画问题**(右图)：
    从A、B、C、D任一点出发，能否通过每条边一次且仅一次再回到该点？
  - 欧拉证明了这样的走法是不存在的，且给出了这类问题的一般结论。

欧拉回路

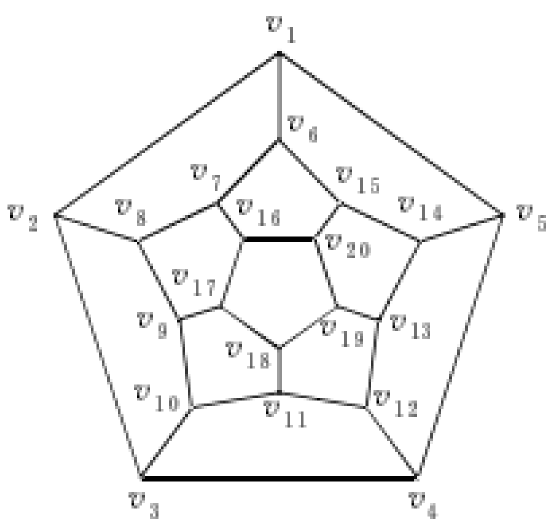
Haiyan Lu
Jiangnan University

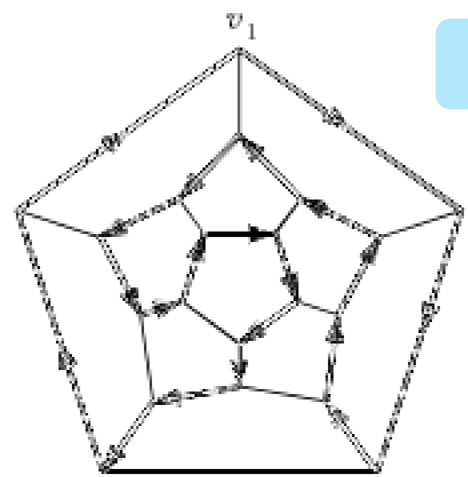
图论简史

这一时期还有许多诸如迷宫问题、棋盘游戏、博弈问题等游戏难题，引出了许多有实用意义的新问题，开辟了图论这门新学科。

- “环球旅行”问题
  - 1857年，英国数学家哈密尔顿(Hamilton)发明了一种游戏，他用一个正12面体象征地球，其20个顶点代表世界上20座名城，要求游戏者从任一城市出发，寻找一条可经过每个城市一次且仅一次再回到原出发点的路，此即“环球旅行”问题。

欧拉回路





图论简史

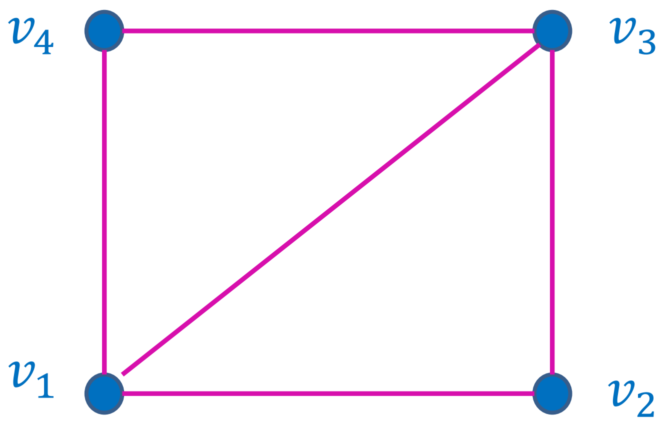
- 图论的第一本专著
  - 1936年，匈牙利数学家O. König发表了图论的第一本专著《有限图和无线图的理论》。
  - 从1736年欧拉的第一篇论文到1936年的第一本专著，这200年间图论的发展比较缓慢。
  - 直到20世纪中期，电子计算机的发展以及离散问题具有越来越重要的地位，使得图论得以迅速发展，成为运筹学的重要分支。
  - 目前图论已被广泛应用于管理科学、计算机科学、信息论、控制论、物理、化学、生物学、心理学等各个领域。

图的基本概念

- 无向图
  - 一个无向图（undirected graph，简称为图）是由点集V和V中元素的无序对的一个集合E所构成的二元组，记为$G=(V,E)$，V中的元素称为顶点(nodes)，E中的元素称为边(edges)。
    - 当V,E都为有限集合时，G称为有限图，否则称为无限图。本章只讨论有限图。
    - 一条连接点$v_i,v_j\in V$的边记为$[v_i,v_j]$（或$[v_j,v_i]$），并称v_i,v_j是相邻的，v_i,v_j称为边$[v_i,v_j]$的端点。
    - 两条边$e_i,e_j\in E$，若它们有一个公共端点u，则称e_i,e_j相邻，并e_i,e_j称为点u的关联边。

图的基本概念

- 无向图
  - 示例:
    $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_4], [v_4, v_1], [v_1, v_3]\})$



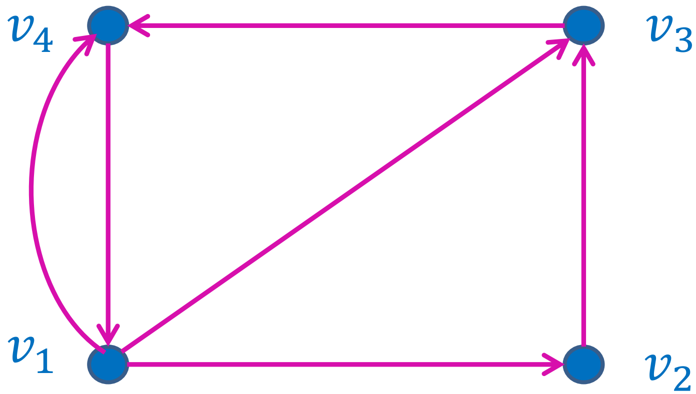
图的基本概念

- 有向图
  - 一个有向图（directed graph，简写为digraph）是由点集V和V中元素的有序对的一个集合A所构成的二元组，记为$D=(V,A)$，V中的元素称为顶点，A中的元素称为弧(arcs)。
    - 一条方向由点v_i指向v_j的弧记为(v_i,v_j)，并称v_i为弧(v_i,v_j)的始点，v_j为弧(v_i,v_j)的终点。
- 混合图
  - 若一个图中既有边又有弧，则称为混合图(mixed graph)。

图的基本概念

- 有向图
  - 示例：

$$D = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_1, v_4), (v_4, v_1), (v_1, v_3)\})$$



图的基本概念

- 网络
  - A directed (or undirected) *network* (网络) is a directed (or undirected) graph whose nodes and/or arcs (or edges) have associated numerical values (typically, costs, capacities, and/or supplies and demands).
  - 许多网络优化问题都可以用数学规划模型来描述，比如最短路问题、最大流问题、最小费用流问题等，都可以通过建立线性规划或整数规划模型求解。但是借助网络模型求解会更简便。

图的基本概念

- 简单图、多重图、链、圈

如无特别说明，均指简单图。

  - 对于**无向图** $G=(V, E)$，
    - 若图 G 中某个边 e 的两个端点相同，则称 e 是**环**(loop)，若两点之间有多于一条的边，则称这些边为**多重边**。
      - 一个无环、无多重边的图称为**简单图**，一个无环但允许有多重边的图称为**多重图**。
    - 以点 v 为端点的边的条数称为 v 的**度**（或**次**，**degree**）。度为1的点称为**悬挂点**，悬挂点的关联边称为**悬挂边**，度为零的点称为**孤立点**。
    - 次为奇数的点，称为**奇点**，否则称为**偶点**。
      - 在计算顶点 v 的度时，顶点 v 处的**环**算作两次。
      - 顶点 v 的度（或次）的更为精确的定义为：v 作为边的端点的次数之和。

图的基本概念

- 简单图、多重图、链、圈
  - 对于**无向图**$G=(V, E)$，
    - 图G的一个点边交错序列$(v_{i_1}, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}, \dots, v_{i_{k-1}}, e_{i_{k-1}}, v_{i_k})$，若满足$e_{i_t} = [v_{i_t}, v_{i_{t+1}}]$ $(t = 1,2, \dots, k-1)$, 则称为一条联结v_{i_1}和v_{i_k}的**链**，记为$(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$。
    - 若链$(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$中$v_{i_1} = v_{i_k}$，则称之为一个**圈**。
      - 若链$(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$中各点都不相同，则称之为**初等链**。
      - 若圈$(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_{i_1})$中$v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k-1}}$都不相同，则称之为**初等圈**。
      - 若链（圈）中的边均不相同，则称之为**简单链**（**圈**）。

图的基本概念

- 简单图、多重图、链、圈
  - 对于**无向图**G=(V, E),
    - 给定图$G=(V,E)$，若E'是E的子集，V'是的V子集，且E'中的边仅与V'中的顶点相关联，则称$G'=(V',E')$为的一个子图。特别地，若$V'=V$，则G'称为G的生成子图（支撑子图）。
    - 图G中，若任何两点之间至少有一条链，则称G是连通图，否则称为不连通图。
    - 若图G不是连通图，则它的每个联通的部分称为G的一个连通分图（简称分图）。
    - 每一对顶点间都有边相连的无向简单图称为完全图。n个顶点的无向完全图记作K_n。

- 类似于无向图，可定义简单有向图、多重有向图。
- 以后除特别说明外，所说的图（有向图）均指简单图（简单有向图）；所说的链（圈）均指初等链（初等圈）。

图的基本概念

- 简单图、多重图、链、圈
  - 对于有向图$D=(V,A)$，
    - 将D中所有弧上的方向去掉，就得到一个无向图，称之为D的**基础图**，记为$G(D)$.
    - 设$(v_{i_1},a_{i_1},v_{i_2},a_{i_2},\dots,v_{i_{k-1}},a_{i_{k-1}},v_{i_k})$是$D$中一个点弧交错序列，若该序列在基础图$G(D)$中所对应的点边序列是一条链，则称该点弧交错序列是$D$的一条**链**。类似可定义**圈**、**初等链(圈)**。
    - 若$(v_{i_1},a_{i_1},v_{i_2},a_{i_2},\dots,v_{i_{k-1}},a_{i_{k-1}},v_{i_k})$是$D$中的一条链，且满足$a_{i_t}=(v_{i_t},v_{i_{t+1}})\ (t=1,2,\dots,k-1)$，则称之为从$v_{i_1}$到$v_{i_k}$的一条**路**。若路的第一个点和最后一个点相同，则称之为**回路**。类似可定义**初等路**（**回路**）。
  - 备注：
    - 对于无向图，链与路（圈与回路）的概念是一致的。

图的矩阵表示

图的矩阵表示方法有赋权矩阵、邻接矩阵、关联矩阵、回路矩阵、割集矩阵等。这里仅介绍两种常用矩阵。

- 赋权矩阵

对于网络$G=(V,E)$，其边$[v_i,v_j]$上的权(比如距离)为w_{ij}，构造矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases} w_{ij}, & [v_i,v_j]\in E \\ \infty, & [v_i,v_j]\notin E \\ 0, & i=j \end{cases}$$

则称矩阵A为网络G的赋权矩阵。

类似可定义有向网络的赋权矩阵

- 邻接矩阵

对于图$G=(V,E)$，设$|V|=n$，构造矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & [v_i,v_j]\in E \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

则称矩阵A为图G的邻接矩阵。

类似可定义有向网络的邻接矩阵

图的模型

- 图模型的构建
  - 确定所研究问题中的具体对象及对象间的联系，并用图的形式表达出来，此即对研究的问题建立图的模型。
  - 图模型的构建往往可以帮助求解一些用其他方法难以解决的问题。

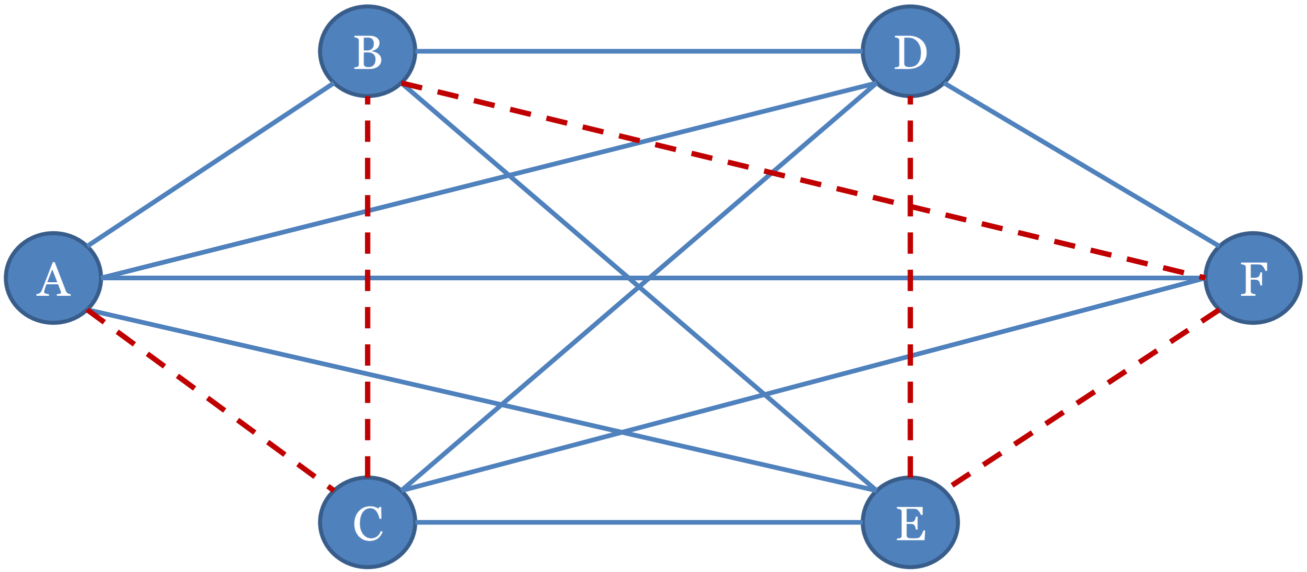
图的模型

- 应用举例
  - **例1** 有甲、乙、丙、丁、戊、己六名运动员报名参加A、B、C、D、E、F六个项目的比赛。下表给出了参赛的报名情况。问六个项目的比赛顺序应如何安排，可使每名运动员都不连续地参加两项比赛？

	A	B	C	D	E	F
甲	√			√		√
乙	√	√		√		
丙			√		√	
丁	√				√	
戊	√	√			√	
己			√	√		√

图的模型

- 应用举例
  - 解： 将比赛项目用点表示，若两个项目有同一个运动员参加，则在相应两点之间连一条边，得到如下的图。在该图中只要找出一个点的序列，使得依次排列的两个点不相邻，即能做到每名运动员不连续地参加两项比赛。
    - A→C→B→F→E→D即为满足要求的方案之一。



课堂练习

- 判断题

（1）图论中的图不仅反映了研究对象之间的关系，而且是真实图形的写照，因而对图中点与点的相对位置、点与点连线的长短曲直等都要严格注意。 错

（2）任一图中奇点的个数可能为奇数个，也可能为偶数个。 错

（3）一个不含圈不含多重边的图称为简单图。 错

Thank you!

谢谢！