



运筹与优化

Operations Research & Optimization

鲁海燕

江南大学理学院

信息与计算科学系

2019-2020-2 学期

Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

线性规划的对偶理论

第二章

影子价格

第3节

影子价格

- 设 B 是原始问题 $\{\max z = cX; AX \leq b; X \geq 0\}$ 的一个最优基, X^* 为相应的最优基可行解 (假设为非退化)。
- Y^* 是对偶问题 $\{\min \omega = Yb; YA \geq c; Y \geq 0\}$ 的与 X^* 互补对应的最优基可行解。
- 因此

$$X_B = B^{-1}b, \quad Y^* = c_B B^{-1}$$

- 从而有

$$\begin{aligned} z^* &= c_B X_B + (c_N - c_B B^{-1}N)X_N \\ &= c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)X_N \\ &= Y^* b + (c_N - c_B B^{-1}N)X_N \end{aligned}$$

- 其中 N 中可能含有松弛变量对应的系数列向量, 也可能含有原有变量对应的系数列向量。

影子价格

$$z^* = c_B B^{-1} b = Y^* b$$

因为 X^* 为非退化的最优解

- 对第 i 个右端项 b_i 进行微小扰动（正或负），使得当前基 B 仍然可行，从而可以保持当前基的最优性。
- 因此，记 B_i^{-1} 为 B^{-1} 的第 i 列，则有

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = c_B B_i^{-1} = y_i^*$$

- y_i^* 理论上表示相对于 b_i 一个单位增量时最优目标函数值的改变量（假设当前非基变量取值为零而不考虑当前基解的可行性），称为第 i 种资源的影子价格(shadow price)。
- 由于 $y_i^* \geq 0$ ，因此随着 b_i 的增加（减少） z^* 会相应地增加（减少）或保持不变。

注意：第 i 种资源的影子价格为 y_i^* 并不是说该种资源增加一个单位，最优目标函数值的增量就一定为 y_i^* ，因为此时最优基可能会发生改变。

影子价格

• 备注

- (1) 资源的市场价格是资源价值的客观体现，随供求关系的变化，价格围绕价值波动。而资源的影子价格则有赖于资源的利用情况，它是当前一组基变量用于获得原始问题最优解时相应于第 i 种资源的对偶变量 y_i^* 的值，即增加一个单位第 i 种资源对最优利润的贡献。
 - 这个贡献因不同企业或同一企业生产任务、产品结构等发生变化而随之改变。
 - 原目标函数的量纲不同， y_i^* 的经济意义也不同，可以给予不同的名称，如影子价格、影子利润、边际价格等。
 - 从一般经济意义来看，可看作是资源转化为最佳经济效益时的转化率，它是在目标函数最优值中体现的，可称之为对目标函数的边际贡献。

影子价格

• 备注

- (2) 资源的影子价格实际上是一种机会成本，反映了企业经理人员为增加一个单位的额外资源愿意付出的最大费用。
- (3) 影子价格还可以反映资源的稀缺程度或利用情况。
 - 利用互补松弛定理，在达到最优解时，若某种资源有剩余，则该资源的影子价格为零；若某种资源的影子价格大于零，则该资源在生产中已耗尽完毕。
 - 注意当出现退化最优解时，可能会出现某种资源刚好耗尽（相应松弛变量取值为零），而并非稀缺资源，但其“影子价格”仍大于零的情况。这时该种资源的任何增量只会带来该种资源的剩余，而不会增加利润。

实际上此时该对偶变量的值并不能反映真正的影子价格，因为对该资源量的微小扰动使得当前最优基变成了非可行基，最优基发生了变化。

影子价格

• 举例说明

本章的引例，即第一章中**例2** (常山机器厂利用A、B、C三种设备生产I、II两种产品，如何安排生产使利润最大?)的线性规划模型为

$$\begin{aligned} \text{LP1} \quad & \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 5x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其对偶问题的模型为

$$\begin{aligned} \text{LP2} \quad & \min \omega = 12y_1 + 16y_2 + 15y_3 \\ & \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 5y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

可以用**图解法**直观地分析**影子价格**，也可以借助**单纯形表**来进行分析。

影子价格

• 举例说明

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3	1	0	1/2	0	-1/5
0	x_4	4	0	0	-2	1	4/5
1	x_2	3	0	1	0	0	1/5
$c_j - z_j$			0	0	-1	0	-1/5

用单纯形法求解LP1，得到最终单纯形表，可得 $y_1^* = 1, y_2^* = 0, y_3^* = 1/5$ 。因此，三种设备的影子价格分别为1, 0, 1/5。

- 在其他条件不变的情况下，若设备A增加1台时，该厂按最优计划安排生产可多获利1百元；设备B增加1台时，最优值不变；设备C增加1台时，可多获利1/5百元。
- $y_1^* = 1 > 0$ ，由互补松弛性，松弛变量 $x_3^* = 0$ ，这说明设备A台时短缺(在生产中已消耗完毕)，没有剩余； $x_4^* = 4 > 0$ ，则说明设备B台时有剩余，即使设备B增加1台时，最优目标函数值也不会增加，因此该资源的影子价格为零，即 $y_2^* = 0$ ； $y_3^* = 1/5 > 0$ ，说明设备C台时短缺，没有剩余，因此松弛变量 $x_5^* = 0$ 。
- 影子价格还反映机会成本，如本例中 $y_1^* = 1$ ，因此当第1种资源的市场价格低于1百元时，可以买进这种资源扩大再生产；相反，当市场价格高于影子价格时，卖出这种资源则可多获利。

谢谢!

Thank you!