运筹与优化
Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

线性规划的对偶理论

第二章

内容提要

- 线性规划的对偶问题
- 对偶问题的基本性质
- 影子价格
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析
- 参数线性规划

线性规划的对偶问题

第1节

对偶问题的提出

- 什么是对偶？
  - “修辞方式，用对称的字句加强语音的效果。”
    ——《现代汉语词典》（修订版）
  - “实质相同但从不同角度提出的不同提法的一对互为对偶的问题。如企业怎样充分利用现有人力、物力完成更多任务和怎样用最少人力物力去完成给定的任务，就是互为对偶的一对问题。对偶理论是从数量关系上研究这一对问题的性质、关系及应用的理论和方法。”
    ——《中国企业管理百科全书》

无论是从理论或实践角度，**对偶理论**都是线性规划中的一个最重要和有趣的概念。

Haiyan Lu @ Jiangnan Unive

对偶问题的提出

产品资源	产品I	产品II	现有条件
设备A	2台时/件	2台时/件	12台时
设备B	4台时/件	0台时/件	16台时
设备C	0台时/件	5台时/件	15台时
产品获利	2百元/件	3百元/件	

- 第一章中**例2**（常山机器厂利用A、B、C三种设备生产I、II两种产品，如何安排生产使利润最大？）的线性规划模型（LP1）为

LP1 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \qquad\quad \le 16 \\ \qquad\quad 5x_2 \le 15 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 现从另一角度提出问题。
- 假定有另一四海机器厂，为扩大生产想收买常山机器厂拥有的设备资源。问：四海机器厂应至少付出多大代价，才能使常山机器厂愿意放弃生产活动，出让自己的资源？

对偶问题的提出

产品资源	产品I	产品II	现有条件
设备A	2台时/件	2台时/件	12台时
设备B	4台时/件	0台时/件	16台时
设备C	0台时/件	5台时/件	15台时
产品获利	2百元/件	3百元/件	

- 设常山机器厂将出让资源(设备A、B、C台时)的单价分别定为y_1、 y_2、 y_3百元。
- 常山机器厂愿意出让资源的条件是：出让收入(租金)不低于用同等数量资源由自己组织生产时的获利。因此有

$$2y_1+4y_2\geq 2$$
$$2y_1+5y_3\geq 3$$

- 常山机器厂出租拥有的A、B、C设备的全部台时的收入为

$$12y_1+16y_2+15y_3$$

- 四海机器厂希望用最小的代价把常山机器厂的全部资源收买过来，因此有

$$\min\omega=12y_1+16y_2+15y_3$$

对偶问题的提出

- 因而可得另一线性规划模型（LP2）：

$$\textbf{LP2}\quad \min \omega = 12y_1 + 16y_2 + 15y_3$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 5y_3 \geq 3 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

- 若将**LP1**作为线性规划问题的**原始问题**(primal problem)，则**LP2**称为线性规划问题的**对偶问题**(dual problem)。

对偶问题的提出

- 原始问题

LP1

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \qquad\quad\ \le 16 \\ \qquad\quad 5x_2 \le 15 \\ \quad x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 对偶问题

LP2

$$\min \omega = 12y_1 + 16y_2 + 15y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \qquad\quad \ge 2 \\ 2y_1 \qquad\quad + 5y_3 \ge 3 \\ \quad y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

原始问题与对偶问题的正则形式

展开形式

- 原始问题

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

- 对偶问题

$$\min \omega = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \geq (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0$$

矩阵形式

- 原始问题

$$\max z = cX$$
$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

- 对偶问题

$$\min \omega = Yb$$
$$YA \geq C$$
$$Y \geq 0$$

原始问题与对偶问题的**正则形式**也称为**对称形式**。

原始问题与对偶问题的正则形式

			原始问题(max)				
			c_1	c_2	…	c_n	右端项
			x_1	x_2	…	x_n	
对偶问题(min)	b_1	y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\leq b_1$
	b_2	y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{22}	$\leq b_2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	b_m	y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{m1}	$\leq b_m$
	右端项		$\geq c_1$	$\geq c_2$	…	$\geq c_n$	

原始问题与对偶问题的正则形式

- **例1** 将引例中的LP2作为原始问题，写出其对偶问题。
- **解** 把LP2作为原始问题 转化为正则形式

LP2

$$
\min \omega = 12y_1 + 16y_2 + 15y_3
\quad
\begin{cases}
2y_1 + 4y_2 \geq 2 \\
2y_1 + 5y_3 \geq 3 \\
y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

转化为正则形式

$$
\max(-\omega) = -12y_1 - 16y_2 - 15y_3
\quad
\begin{cases}
-2y_1 - 4y_2 \leq -2 \\
-2y_1 - 5y_3 \leq -3 \\
y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

写出对偶问题

$$
\min(-z) = -2x_1 - 3x_2
\quad
\begin{cases}
-2x_1 - 2x_2 \geq -12 \\
-4x_1 \geq -16 \\
-5x_2 \geq -15 \\
x_1,\ x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

转化为正则形式

LP1

$$
\max z = 2x_1 + 3x_2
\quad
\begin{cases}
2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
4x_1 \leq 16 \\
5x_2 \leq 15 \\
x_1,\ x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

LP1与LP2互为对偶

原始问题与对偶问题的标准形式

- 对于标准形式的线性规划问题，如何处理？

设线性规划问题

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \ge 0, & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

第一步：将等式约束分 解为两个不等式约束， 得

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i=1,2,\cdots,m \quad (*) \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le -b_i, & i=1,2,\cdots,m \quad (**) \\ x_j \ge 0, & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

设是y_i'对应于(*)式的对偶变量，是 y_i''对应于(**)式的对偶变量， $i=1,2,\cdots,m$

原始问题与对偶问题的标准形式

- 对于标准形式的线性规划问题，如何处理？

第二步：按对称形式的 变换关系写出对偶问题

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-b_i y_i'')$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij} y_i'') \geq c_j, & j = 1,2,\cdots,n \\ y_i', y_i'' \geq 0, & i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

令$y_i = y_i' - y_i''$,由于$y_i', y_i'' \geq 0$,可知y_i不受约束，将y_i代入上述规划问题并整 理得到对偶问题

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1,2,\cdots,n \\ y_i\text{为无约束，} & i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

原始问题与对偶问题的标准形式

展开形式

- 原始问题

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

- 对偶问题

$$\min \omega = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \geq (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$y_1, y_2, \cdots, y_m$无约束

矩阵形式

- 原始问题

$$\max z = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

- 对偶问题

$$\min \omega = Yb$$
$$YA \geq C$$

Y无约束

原始问题与对偶问题的**正则形式**和其**标准形式**完全等价。

原始问题与对偶问题的混合形式

重要

原始问题（对偶问题）			对偶问题（原始问题）
目标函数	$\boxed{\max z}$		目标函数 $\boxed{\min \omega}$
变量	n个	一致	n个 约束条件
	≥ 0		$\geq$
	≤ 0		$\leq$
	无约束		$=$
约束条件	m个	相反	m个 变量
	$\leq$		≥ 0
	$\geq$		≤ 0
	$=$		无约束
约束条件右端项			目标函数变量的系数
目标函数变量的系数			约束条件右端项

原始问题与对偶问题的混合形式

- 例2 写出下述线性规划的对偶问题

$$\min z = 7x_1 + 4x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 \le 24 \\ -3x_1 - 6x_2 - 4x_3 \ge 15 \\ 5x_2 + 3x_3 = 30 \\ x_1 \le 0, x_2\text{取值无约束，} \; x_3 \ge 0 \end{cases}$$

- 解
  - 方法一：将原始问题化为正则形式，然后逐步求解（《运筹学基础及应用（第六版）》66页例2）。

原始问题与对偶问题的混合形式

- 例2的解
  - 方法二：按照原始问题与对偶问题的对应关系表直接写出对偶问题。

原始问题（对偶问题）	对偶问题（原始问题）
$\min z = 7x_1 + 4x_2 - 3x_3$	$\max \omega = 24y_1 + 15y_2 + 30y_3$
s.t.	s.t.
$-4x_1 + 2x_2 - 6x_3 \le 24$	$y_1 \le 0$
$-3x_1 - 6x_2 - 4x_3 \ge 15$	$y_2 \ge 0$
$5x_2 + 3x_3 = 30$	y_3取值无约束
$x_1 \le 0$	$-4y_1 - 3y_2 \ge 7$
x_2取值无约束	$2y_1 - 6y_2 + 5y_3 = 4$
$x_3 \ge 0$	$-6y_1 - 4y_2 + 3y_3 \le -3$

若将得到的对偶问题作为原始问题，则按箭头从右到左即可写出其对偶问题。

对上述形式作适当调整，使之表达为合理规范的表达形式。

课堂练习

- 求下述线性规划问题的对偶问题

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 \qquad\qquad + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ \qquad x_2 \quad + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0; x_2, x_3 \geq 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 \quad\quad + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_2 \quad + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0; x_2, x_3 \geq 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

课 堂 练 习

- 解：

设对应三个约束条件的对偶变量分别为y_1, y_2, y_3，则按照原始问题与对偶问题之间的对应关系，可得对偶问题为

$$\max \omega = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

谢 谢！

Thank you!