运筹与优化

Operations Research & Optimization

鲁海燕

江南大学理学院

信息与计算科学系

2019-2020-2学期

Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

运输问题

第三章

表上作业法

第2节

表上作业法

- 算法思路
  - 表上作业法为求解运输问题的特殊单纯形法，又称为**运输单纯形法**，算法思路与一般单纯形法的思路类似，可归纳为：
    - 首先给出一个初始方案；
    - 然后根据判别准则，检验当前方案是否为最优方案；
    - 若是，则已得最优解；否则，对当前方案进行调整、改进，直到求得最优方案为止。

表上作业法

- 算法步骤
  - (1) 找出初始基可行解：在有$m \times n$格的产销平衡表上，按照一定规则，给出$m+n-1$个数字（称为数字格），此即初始基变量的取值。
  - (2) 最优解的判别：在表上计算空格（对应非基变量）的检验数，判别当前解是否为最优解。若是，则停止计算；否则转入下一步。
  - (3) 基本可行解的改进：确定换入变量和换出变量，用闭回路法调整方案。
  - (4) 重复(2)(3)，直到得到最优解为止。

初始基可行解的给定

- 方法较多，这里给出两种常用方法：
  - 最小元素法
    - **步骤**：其基本思想是就近供应，即从单位运价表中最小元素处开始确定供销关系，然后次小，依此类推，直到给出初始基可行解为止。
  - 沃格尔（Vogel）法
    - **思路**：亦称元素差额法，是对最小元素法的改进。
      - **最小元素法**仅从局部观点考虑就近供应，可能会造成总体的不合理。
      - **Vogel法**考虑到，一产地的产品（或销地的需求）若分别按最小运费和按次小运费就近供应，就会有一个运费上的差额，这个差额越大，说明不按最小运费调运时，则运费会增加越多。因此，对差额最大处，应当采用最小运费调运。
    - **步骤**：在最小运费和次小运费的差额的最大处，按最小运费调运。

初始基可行解的给定

- 最小元素法

例1中给出的产销平衡表和单位运价表如下。从单位运价表的最小元素开始确定供销关系，并将供应数量填入产销平衡表中相应位置；当产地或销地在数量上供应完毕或得到满足时，划去单位运价表中对应的行或列；重复上述步骤，直到给出初始基可行解。

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

该方案的费用为86元。

初始基可行解的给定

- 最小元素法
  - 数字格和空格
    - 在调运方案表（基可行解）中，填写数字的格成为**数字格**，对应运输问题中的**基变量**；不填数字的格称为**空格**，对应相应基可行解中的**非基变量**。
  - 基变量的个数
    - 运输问题中基变量个数为$m+n-1$个，故调运方案中的数字格应为$m+n-1$个。
  - 特殊情况的处理
    - 采用最小元素法确定调运方案过程中，若出现选定的最小元素所在行的产地产量等于所在列的销地销量的情况，这时在产销平衡表上填一个数字，运价表上就要同时划去一行和一列。为使调运方案中的数字格仍为$m+n-1$个，需要在产销平衡表上对应运价表中同时划去的行或列的任一空格位置填一个数字“0”。

初始基可行解的给定

- 举例：特殊情况的处理

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		*			7
A_2		*			4
A_3	3	6	*	*	9
销量	3	6	5	6	

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	4	5
A_2	7	7	3	8
A_3	1	2	10	6

- 当选定最小元素后，若该元素所在行的产地产量等于虽在列的销地销量，则在产销平衡表相应位置填一个数，运价表上要同时划掉一行和一列，此时为使调运方案中数字格仍为$m+n-1$个，需要在同时划去的该行或该列的任一空格处填补一个“0”。

初始基可行解的给定

- 最小元素法
  - 采用最小元素法给出的初始解是运输问题的基可行解。

证明：

(1)采用最小元素法在最终表上填了$m+n-1$个非负数字，即给出了$m+n-1$个（基）变量的值。

(2)这$m+n-1$个（基）变量对应的系数列向量是线性无关的。

理由如下：

设表中确定的第一个基变量为$x_{i_1j_1}$，它对应的系数列向量为$P_{i_1j_1}=e_{i_1}+e_{m+j_1}$，由于当给定$x_{i_1j_1}$的值后，将划去单位运价表中的$i_1$行或$j_1$列，这样后面确定的变量对应的系数列向量将不再出现$e_{i_1}$或$e_{m+j_1}$，因此$P_{i_1j_1}$不可能用解中其余变量对应的列向量的线性组合来表示。类似地，给出第二个，…，第$m+n-1$个向量。

最终，**这$m+n-1$个向量中的任何一个都不可能用其余向量的线性组合来表示**，故这$m+n-1$个向量是线性无关的。

初始基可行解的给定

- 沃格尔法

例1 中，从单位运价表上分别计算出每行与每列的的最小元素与次小元素之差，再从差值最大的行或列中找出最小元素确定供销关系，并将供应数量填入产销平衡表中；当产地或销地在数量上供应完毕或得到满足时，划去运价表中对应的行或列；重复上述步骤，直到给出初始基可行解。

销 / 产	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

该方案的费用为85元。

销 / 产	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额
A_1	3	11	3	10	
A_2	1	9	2	8	
A_3	7	4	10	5	
列差额					

初始基可行解的给定

- 备注
  - 沃格尔法与最小元素法除在确定供销关系的原则上不同外，其余步骤都相同。
  - 沃格尔法给出的初始基可行解比用最小元素法给出的初始基可行解更接近最优解。
    - 一般当产地销地不多时，沃格尔法给出的初始方案可能就是最优方案。因此有时就用沃格尔法来求运输问题的近似最优解，即把用沃格尔法求得的初始方案作为运输问题的近似最优解。

课 堂 练 习

- 分别用最小元素法和沃格尔法给出如下运输问题的初始调运方案及其费用。

销地 / 单位运价 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	9	3	8	4	70
A_2	7	6	5	1	50
A_3	2	10	9	2	20
销量	10	60	40	30	140

课堂练习

- 解：

用最小元素法求得的初始基本可行解(初始调运方案)为

$$X=\begin{bmatrix} & 60 & 10 & \\ & & 20 & 30 \\ 10 & & 10 & \end{bmatrix}$$

总运费为

$$Z = 3\times 60+8\times 10+5\times 20+1\times 30+2\times 10+9\times 10 = 500$$

课 堂 练 习

- 解（续）：

用沃格尔法求得的初始基本可行解(初始调运方案)为

$$X = \begin{bmatrix} & 60 & 10 & \\ & & 30 & 20 \\ 10 & & & 10 \end{bmatrix}$$

总运费为

$$Z = 3 \times 60 + 8 \times 10 + 5 \times 30 + 1 \times 20 + 2 \times 10 + 2 \times 10 = 470$$

最优解的判别

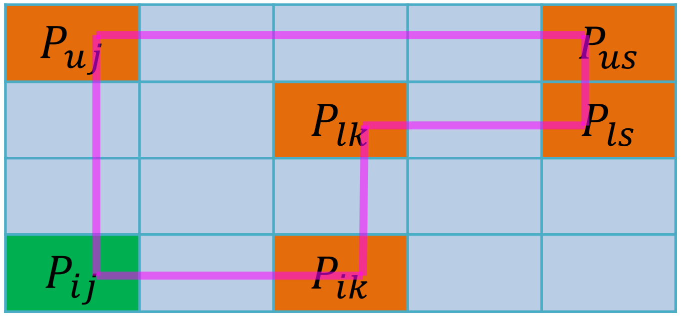
- 判别准则
  - 运输问题的目标函数要求实现最小化，因此，当所有空格（非基变量）的检验数 $c_{ij} - c_B B^{-1} P_{ij} \geq 0$ 时，当前解为最优解。
- 如何计算空格的检验数？
  - 闭回路法
  - 位势法（对偶变量法）

最优解的判别

- 闭回路法
  - 在给出调运方案（基可行解）的计算表上，从每一空格出发找一条由连接该空格和若干个数字格的水平和垂直连线包围而成的封闭回路。
    - **闭回路**以某空格为起点，用水平和垂直直线向前划，当碰到一数字格时可以转90°后继续前进，直到回到起始空格为止。
    - 从每一空格出发，都可确定唯一一条闭回路。
      - 因为$m+n-1$个数字格（基变量）对应的系数列向量（及人工变量对应的列向量）构成一个基，而任一空格（非基变量）对应的系数列向量可表示为这个基的唯一线性组合。

最优解的判别

- 闭回路法
  - 闭回路示例：
    - 下面的运输作业表中给出了以空格(i,j)为出发点的闭回路，该闭回路上其余顶点均为数字格，因此该闭回路上有$P_{ij}\in N$，$P_{ik},P_{lk},P_{ls},P_{us},P_{uj}\in B$.



该线性组合中系数非零的基变量（数字格）位于该闭回路的顶点。（其余基变量没有在该作业表中显示。）

$P_{ij}\in N$可表示为

$$P_{ij}=P_{ik}-P_{lk}+P_{ls}-P_{us}+P_{uj}$$

$$=(e_i+e_{m+k})-(e_l+e_{m+k})+(e_l+e_{m+s})-(e_u+e_{m+s})+(e_u+e_{m+j})$$

最优解的判别

- 闭回路法
  - 闭回路的特点
    - 闭回路中每条边或者是水平的，或者是垂直的；
    - 闭回路中每一个顶点都是“转角点”，即水平边与垂直边交替出现；
    - 对任一闭回路，作业表中的每一行和每一列要么不含该闭回路的顶点，要么含有该闭回路的两个顶点；
    - 闭回路中顶点的个数必为偶数。

最优解的判别

- 用**闭回路法**求前面用最小元素法给出的方案中空格 (A_1, B_1) 的**检验数**：
  $\sigma_{11} = (+1)\times 3 + (-1)\times 3 + (+1)\times 2 + (-1)\times 1 = 1$（元）
  这表明：若如此调整运量将增加1元运费。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	$\boxed{3}$	$\boxed{11}$	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{10}$ 3	7
A_2	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{9}$	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{8}$	4
A_3	$\boxed{7}$	$\boxed{4}$ 6	$\boxed{10}$	$\boxed{5}$ 3	9
销量	3	6	5	6	

最优解的判别

- 按闭回路法求得当前方案中所有空格的检验数：

空格	闭回路	检验数
(11)	(11)–(13)–(23)–(21)–(11)	1
(12)	(12)–(14)–(34)–(32)–(12)	2
(22)	(22)–(23)–(13)–(14)–(34)–(32)–(22)	1
(24)	(24)–(23)–(13)–(14)–(24)	–1
(31)	(31)–(34)–(14)–(13)–(23)–(21)–(31)	10
(33)	(33)–(34)–(14)–(13)–(33)	12

- 上述方案（基可行解）中有空格的检验数为负，说明该方案不是最优方案。

最优解的判别

- 位势法
  - 当一个运输问题的产地和销地很多时，用**闭回路法**求空格检验数的工作量会非常繁重。
  - **位势法（对偶变量法）**是一种比较简便的求检验数的方法。位势法利用**线性规划的对偶理论**，通过位势（对偶变量）来计算空格的检验数。

最优解的判别

- 位势法的基本原理

设$u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n$是对应运输问题$m+n$个约束条件的对偶变量，则运输问题的对偶问题为

$$\max \omega = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$\begin{cases} u_i + v_j \le c_{ij}, & i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n \\ u_i, v_j \text{无约束}, & i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n \end{cases}$$

设B是运输问题的含有人工变量x_a的$m+n$阶基矩阵，由于该人工变量在运输问题表上作业法求解过程中每一步均取值为零，故为方便起见，可设运输问题的目标函数中x_a的系数$c_a=0$.

由线性规划的对偶理论可知:

$$c_B B^{-1} = (u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n)$$

最优解的判别

- 位势法的基本原理

由于$P_{ij} = e_i + e_{m+j}$，故x_{ij}的检验数为

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - c_B B^{-1} P_{ij} = c_{ij} - c_B B^{-1}\left(e_i + e_{m+j}\right) = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

设$P_a = e_1$，则x_a的检验数为

$$\sigma_a = c_a - c_B B^{-1} P_a = c_a - c_B B^{-1} e_1 = c_a - u_1$$

由单纯形法可知，数字格（基变量）的检验数应为零，因此得到如下方程组：

$$\begin{cases} c_{ij} - \left(u_i + v_j\right) = 0, & （i,j）\in B \\ c_a - u_1 = 0 & （注意到前面设c_a = 0） \end{cases}$$

$m+n$个方程
$m+n$个变量

从上述方程组求得u_i, v_j的值，从而可以进一步求得所有空格（非基变量）的检验数：

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + v_j\right),（i,j）\in N$$

c_a的取值不同，求解所得对偶变量会不同，但是所得检验数不会改变。

最优解的判别

- 用位势法求前述用最小元素法给出的初始调运方案中所有空格的检验数：

  (1) 根据所得调运方案，列出下表，并求出位势(对偶变量)：

销地 C_B 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1			3	10	0
A_2	1		2		-1
A_3		4		5	-5
v_j	2	9	3	10	

最优解的判别

(2) 求出位势后，列出下表，求出所有空格的检验数：

销地 σ_{ij} 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	1 $\boxed{3}$	2 $\boxed{11}$	0 $\boxed{3}$	0 $\boxed{10}$	0
A_2	0 $\boxed{1}$	1 $\boxed{9}$	0 $\boxed{2}$	−1 $\boxed{8}$	−1
A_3	10 $\boxed{7}$	0 $\boxed{4}$	12 $\boxed{10}$	0 $\boxed{5}$	−5
v_j	2	9	3	10	

(3) 最优解的判别：有负的检验数存在，故上述方案不是最优方案。

基本可行解的改进

- 闭回路调整法
  - 一般选择最小的负检验数对应的空格作为调入格（入基变量），以此格为出发点，作一闭回路；
  - 调入格的调整量θ取作闭回路上标有(−1)的数字格中数字的最小者，其对应的数字格作为调出格（出基变量），经调整后将变成空格；
  - 然后按闭回路上的正、负号，加上和减去θ，则得到调整后的方案。

备注：在闭回路调整中，若在需要减少运量的数字格中有两个或两个以上数字格中数字为θ，为使调整所得新方案中的数字格仍为$m+n-1$个，则在将这些运量变为0的数字格之一变为空格时，其余仍需作为数字格（格中数字为0）。

基本可行解的改进

- 闭回路调整法

根据前述计算，取空格(2,4)为调入格，以其为出发点，作一闭回路，确定调整量为$\theta = \min\{3,1\} = 1$(见下表):

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4(+1)	3(−1)	7
A_2	3		1(−1)	(+1)	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

基本可行解的改进

- 闭回路调整法

以调整量$\theta = \min\{3,1\} = 1$沿闭回路对原方案进行调整，得到调整后的方案为：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

基本可行解的改进

- 闭回路调整法

计算调整后新方案中所有空格的检验数为（见下表）：

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	2		
A_2		2	1	
A_3	9		12	

表中**所有检验数都为非负**，故当前解即为**最优解**，这时总运费为85元。

表上作业法计算中的问题

- 无穷多最优解
  - 当某个空格（非基变量）的检验数为零时，该问题有无穷多最优解。
  - 以检验数为零的空格为调入格，用闭回路法调整后即可得另一最优解（最优基解）。
- 退化解
  - 用表上作业法求解运输问题出现退化时，应在相应的格中填上数字0，以表示此格为数字格。有以下两种情形：
    - 在确定初始解的供销关系时，在单位运价表中出现需同时划去一行和一列的情形，按前述的方法处理，从而得到退化解。
    - 在用闭回路法调整方案时，在闭回路上出现两个或两个以上标有(-1)的数字格中数字为θ。此时，在这些最小值处，除有一个变为空格外，其余最小值的数字格内须填入0，从而得到退化解。

表上作业法计算中的问题

- 最大值问题
  - 当运输问题求最大值时，有两种方法求解：

（1）将最大化问题转化为最小化问题。

设最大化运输问题的单位运价表为$C=(c_{ij})_{m\times n}$，用一个充分大的数M（一般令$M=\max\{c_{ij}\}$）去减去C中每一个c_{ij}，得到矩阵$C'=(c'_{ij})_{m\times n}$，其中$c'_{ij}=M-c_{ij}\geq 0$，将C'作为最小化运输问题的单位运价表，用表上作业法求出最优解$\{x_{ij}\}$，并求得原最大化问题的最优目标函数值$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$.

（2）原目标函数不变，当所有非基变量的检验数$\sigma_{ij}\leq 0$时最优。

求初始方案可采用最大元素法等。

备注： 一般采用第（1）种方式求解最大化运输问题。

谢谢！

Thank you!