动态规划

第八章

动态规划应用举例

第5节

确定性动态规划举例

- 资源分配问题
  - 将数量一定的一种或若干种资源(例如原材料、资金、机器设备、劳力、食品等等)，恰当地分配给若干个使用者，而使目标函数为最优。
    - 资源平行分配问题
      - 决策变量可取连续值，也可取离散值，只将资源合理分配而不考虑回收。
    - 资源连续分配问题
      - 决策变量取连续值，且既考虑资源的分配又考虑回收利用的问题，此类问题称为资源连续分配问题。

资源平行分配问题

- 问题描述
  - 设有某种原料，总数量为a，用于生产n种产品。若分配数量x_i用于生产第i种产品，其收益为$g_i(x_i)$。问应如何分配，才能使生产n种产品的总收入最大？
- 静态规划模型

$$\max z = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \cdots + g_n(x_n)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

  - 当$g_i(x_i)$为线性函数时，该问题为线性规划问题；
  - 当$g_i(x_i)$为非线性函数时，该问题为非线性规划问题；
  - 但当n较大时，问题求解较为复杂；利用问题的特殊结构，将其视为多阶段决策问题，可用动态规划方法来求解。

资源平行分配问题

- 动态规划模型
  - 其他同类问题
    - 投资分配问题
    - 销售店分配问题
    - 货物分配问题
    - …
  - 求解思路
    - 通常以把资源分配给一个或几个使用者的过程作为一个阶段；
    - 把问题中的变量选为决策变量；
    - 将累计的量或随递推过程变化的量选为状态变量。

资源平行分配问题

- 动态规划模型
  - 求解步骤
    - 设状态变量s_k表示用于分配给生产第k种产品至第n种产品的原料数量；
    - 决策变量x_k表示分配给生产第k种产品的原料数量；
    - 状态转移方程为 $s_{k+1} = s_k - x_k$；
    - 允许决策集合为 $D_k(s_k) = \{x_k | 0 \le x_k \le s_k\}$；
    - 令最优值函数$f_k(s_k)$表示以数量为s_k的原料分配给生产第k种产品至第n种产品所得到的最大总收入；
    - 写出动态规划的**逆序递推**关系式

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} \{g_k(x_k) + f_{k+1}(s_k - x_k)\}, k = n-1, \ldots, 1 \\ f_n(s_n) = \max\limits_{x_n = s_n} \{g_n(x_n)\} \end{cases}$$

    - 利用上述递推关系式进行逐段计算，最后求得即为所求问题的最大总收入。

Haiyan Lu
Jiangnan University

资源平行分配问题

- **例6** 某一警卫部门共有9支巡逻队，负责3个要害部位A、B、C的警卫巡逻。对每个部位可分别派出2~4支巡逻队，并且由于派出巡逻队数的不同，各部位预期在一段时期内可能造成的损失有差别，具体数据见下表。问该警卫部门应往各部位分别派多少支巡逻队，使总的预期损失最小？

预期损失		部位		
		A	B	C
巡逻队数	2	18	38	24
	3	14	35	22
	4	10	31	21

也可以用**顺序解法**来求解，参见《运筹学基础及应用（第6版）》229-230页。

资源平行分配问题

- **解：** 将问题按要害部位分成三个阶段，A、B、C三个部位分别编号为1、2、3.

设s_k表示分配给第k个至第3个部位的巡逻队数(即第k个阶段初拥有的可派遣的巡逻队数)，x_k表示分配给第k个部位的巡逻队数，则状态转移方程为

$$s_{k+1} = s_k - x_k \quad (k = 1,2,3)$$

各阶段的允许决策集合为

$$D_k(s_k) = \{x_k | 2 \le x_k \le s_k\} \cap \{2,3,4\} \quad (k = 1,2,3)$$

阶段指标$p_k(x_k)$表示x_k个巡逻队分配到第k个部位所造成的预期损失，

$f_k(s_k)$表示s_k个巡逻队分配到第k个至第3个部位所造成的最小预期损失，因而可写出**逆序递推**关系式为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min\limits_{x_k \in D_k(s_k)} [p_k(x_k) + f_{k+1}(s_k - x_k)], \ k = 3,2,1 \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

(因问题只有三个要害部位，第4阶段初拥有的未派出的巡逻队对前3个部位的预期损失不再有影响，故取$f_4(s_4) = 0$)

资源平行分配问题

- **解：**

  $k=3$时： $f_3(s_3)=\min\limits_{x_3\in D_3(s_3)}[p_3(x_3)+f_4(s_4)]=\min\limits_{x_3\in D_3(s_3)}[p_3(x_3)]$

  由于$s_3\in S_3=\{2,3,4,5\}$，故$x_3\in D_3(s_3)=\{x_3|2\le x_3\le s_3\}\cap\{2,3,4\}$的取值及$f_3(s_3)$的计算情况见下表：

x_3		$p_3(x_3)$			$f_3(s_3)$	x_3^*
		2	3	4		
s_3	2	24	—	—	24	2
	3	24	22	—	22	3
	4	24	22	21	21	4
	5	24	22	21	21	4

Haiyan Lu 5/14/2020
Jiangnan University

资源平行分配问题

- **解：**

$k=2$时： $f_2(s_2)=\min\limits_{x_2\in D_2(s_2)}[p_2(x_2)+f_3(s_2-x_2)]$

由于$s_2\in S_2=\{5,6,7\}$，故$x_2\in D_2(s_2)=\{x_2|2\le x_2\le s_2\}\cap\{2,3,4\}$的取值及$f_2(s_2)$的计算情况见下表：

x_2		$p_2(x_2)+f_3(s_2-x_2)$ 2	3	4	$f_2(s_2)$	x_2^*
s_2	5	38+22	35+24	—	59	3
	6	38+21	35+22	31+24	55	4
	7	38+21	35+21	31+22	53	4

Haiyan Lu
Jiangnan University

资源平行分配问题

- **解：**

$k=1$时： $f_1(s_1)=\min\limits_{x_1\in D_1(s_1)}[p_1(x_1)+f_2(s_1-x_1)]$

由于$s_1\in S_1=\{9\}$，故$x_1\in D_1(s_1)=\{2,3,4\}$，从而可得到以下计算表：

x_1		$p_1(x_1)+f_2(s_1-x_1)$			$f_1(s_1)$	x_1^*
		2	3	4		
s_1	9	18+53	14+55	10+59	69	3或4

根据上述三个表格反推可得最优分配方案为：

$$x_1^*=3, x_2^*=4, x_3^*=2, s_1=9, s_2=6, s_3=2,$$

或者

$$x_1^*=4, x_2^*=3, x_3^*=2, s_1=9, s_2=5, s_3=2,$$

两者总的预期损失均为69.

资源连续分配问题

- 问题描述
  - 设有数量为s_1的某种原料，可投入A和B两种生产。第一年若以数量u_1投入生产A，剩下的量$s_1 - u_1$就投入生产B，则可得收入为$g(u_1) + h(s_1 - u_1)$，其中$g(\cdot)$和$h(\cdot)$为已知函数，且$g(0) = h(0) = 0$。
  - 这种资源在投入A、B生产后，年终还可回收再投入生产。设年回收率分别为$0 < a < 1$和$0 < b < 1$，则在第一年生产后，回收的资源量合计为$s_2 = au_1 + b(s_1 - u_1)$。第二年再将资源数量$s_2$中的$u_2$和$s_2 - u_2$分别再投入A、B两种生产，则第二年又可得到收入为$g(u_2) + h(s_2 - u_2)$。
  - 如此继续进行n年，试问：应当如何决定每年投入生产A的资源量$u_1, u_2, \ldots, u_n$，才能使总的收入最大？

资源连续分配问题

- 备注
  - 第1节中的例2(机器负荷分配问题)即属于资源连续分配问题。
    - 该问题中s_k, u_k均取连续变量，其中非整数值可以这样理解：如 $s_k = 0.6$ 就表示一台机器在第k年度中正常工作时间只占 6/10， $u_k = 0.3$ 就表示一台机器在该年度中只有3/10的时间能在高负荷下工作。

资源连续分配问题

- 静态规划模型

$$\max z = g(u_1) + h(s_1 - u_1) + g(u_2) + h(s_2 - u_2) + \cdots + g(u_n) + h(s_n - u_n)$$

$$s.t.\begin{cases} s_2 = au_1 + b(s_1 - u_1) \\ s_3 = au_2 + b(s_2 - u_2) \\ \vdots \\ s_{n+1} = au_n + b(s_n - u_n) \\ 0 \le u_i \le s_i, i = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

资源连续分配问题

- 动态规划模型

设s_k为状态变量，它表示在第k阶段(第k年)初可投入A、B两种生产的资源量。

设u_k为决策变量，它表示在第k阶段(第k年)用于A生产的资源量，则$s_k - u_k$表示用于B生产的资源量。

状态转移方程为 $s_{k+1} = au_k + b(s_k - u_k).$

最优值函数$f_k(s_k)$表示有资源量s_k，从第k阶段到第n阶段采取最优分配方案进行生产后所得到的最大总收入。

因此可写出动态规划的**逆序递推**关系式为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le u_k \le s_k} \{g(u_k) + h(s_k - u_k) + f_{k+1}(au_k + b(s_k - u_k))\}, \\ \qquad k = n, n-1, \dots, 1 \\ f_{n+1}(s_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

最后求出$f_1(s_1)$即为所求问题的最大总收入。

资源连续分配问题

- 例7 上述资源连续分配问题中，设资源为可投入A和B两种生产的机器，若机器数量为$s_1 = 100$台，$a = \frac{2}{3} \times 100\%$，$b = \frac{9}{10} \times 100\%$，$g(x) = 10x$(万元)，$h(x) = 7x$(万元)，试确定三年内每年如何分配每年用于A、B两种生产的机器数量，使三年的总收入为最大。
- 解：将3年作为三个阶段($k = 1,2,3$)；状态变量s_k为第k年初可用于生产的完好机器数；x_k为第k年用于A生产的机器数，$s_k - x_k$为用于B生产的机器数。因此状态转移方程为

$$s_{k+1} = \frac{2}{3}x_k + \frac{9}{10}(s_k - x_k),$$

逆推关系式为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} \{10x_k + 7(s_k - x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \\ \qquad\qquad k = 3,2,1 \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

从第3年度开始，向前逆序计算。

资源连续分配问题

- **解：**

当$k=3$时：$f_3(s_3)=\max\limits_{0\le x_3\le s_3}\{10x_3+7(s_3-x_3)+f_4(s_4)\}=10s_3,\ x_3^*=s_3,$

当$k=2$时：$f_2(s_2)=\max\limits_{0\le x_2\le s_2}\{10x_2+7(s_2-x_2)+f_3(s_3)\}$

$$=\max_{0\le x_2\le s_2}\left\{10x_2+7(s_2-x_2)+10\left(\frac{2}{3}x_2+\frac{9}{10}(s_2-x_2)\right)\right\}$$

$$=\max_{0\le x_2\le s_2}\left\{\frac{2}{3}x_2+16s_2\right\}=16\frac{2}{3}s_2,\ x_2^*=s_2,$$

当$k=1$时：$f_1(s_1)=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}\{10x_1+7(s_1-x_1)+f_2(s_2)\}$

$$=\max_{0\le x_1\le s_1}\left\{10x_1+7(100-x_1)+16\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x_1+\frac{9}{10}(100-x_1)\right)\right\}$$

$$=\max_{0\le x_1\le s_1}\{2200-0.9x_1\}=2200,\ x_1^*=0.$$

反向逆推，得到：$x_1^*=0,\ x_2^*=90,\ x_3^*=60,\ s_1=100,\ s_2=90,\ s_3=60$，
三年总收入为2200万元。

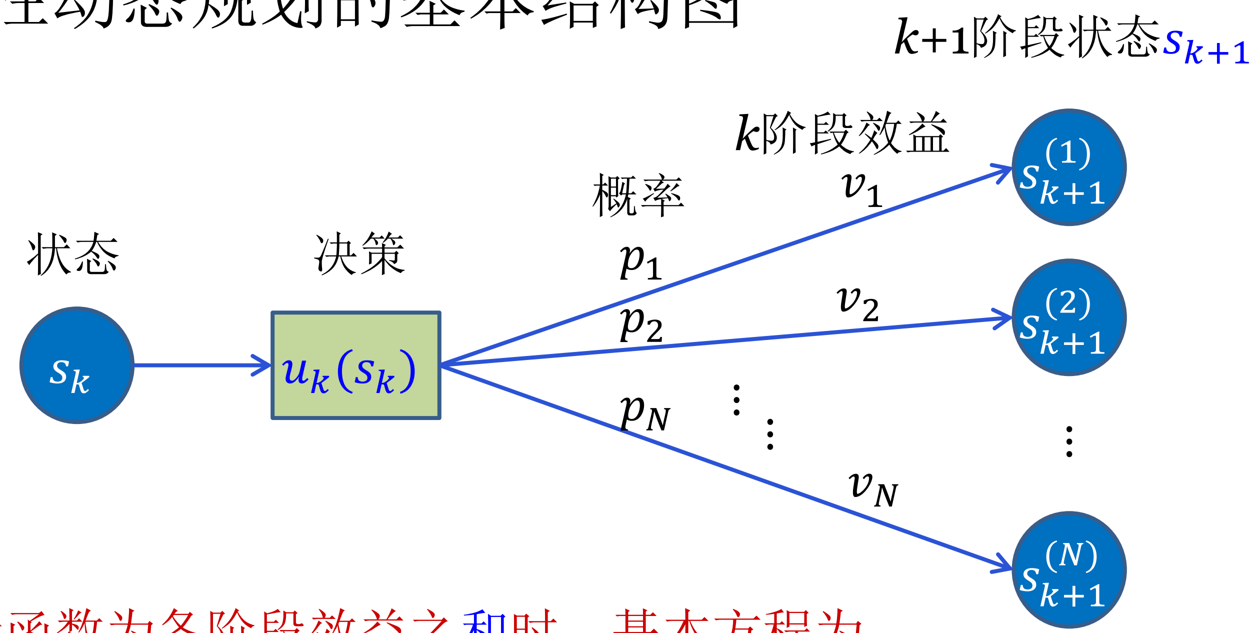
Haiyan Lu 5/14/2020
Jiangnan University

随机性动态规划举例

- 随机性动态规划
  - 随机性动态规划不同于确定性动态规划之处在于**状态转移率是不确定的（但有某种随机规律）**，即对给定的状态和决策，下一阶段的到达状态是具有确定概率分布的随机变量，这个**概率分布**由本阶段的状态和决策完全确定。
  - 在实际应用中，经常会遇到某些多阶段决策过程中出现随机因素的情况，而动态规划的方法也可以处理这种随机性动态规划问题。

随机性动态规划举例

- 随机性动态规划的基本结构图



当指标函数为各阶段效益之和时，基本方程为

$$f_k(s_k) = \max_{u_k \in D_k(s_k)} \{E[v_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})]\}$$

其中表示$E[\cdot]$期望值。

(注意：对随机性动态规划问题，其基本方程与边界条件应具体情况具体分析。)

随机性动态规划举例

- **例8** 某公司承担一种新产品试制任务，合同要求三个月内交出一台合格的样品，否则将负担1500元的赔偿费。
  - 据有经验的技术人员估计，试制时每投产一台合格的概率为1/3，投产一批的准备结束费用为250元，每台试制费用为100元。
  - 若投产一批后全部不合格，可以再投产一批试制，但每投产一批的周期需一个月。

要求确定每批投产多少台，使总的试制费用(包括可能发生的赔偿损失)的期望值为最小。

随机性动态规划举例

- **解：** 将合同期三个月中的每个月作为一个阶段，共分3个阶段。
  - 状态变量s_k：设尚无一台合格品时$s_k=1$，已得到一台以上(含一台)合格品时$s_k=0$。故签订合同时 $s_1=1$。
  - 决策变量x_k：为每个阶段的投产试制台数。允许决策集合为

$$D_k(s_k)=\begin{cases}\{0,1,2,\dots,N\}, & s_k=1\\ \{0\}, & s_k=0\end{cases}$$

  - 状态转移方程：$\begin{cases}p_k(s_{k+1}=1)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x_k}\\ p_k(s_{k+1}=0)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x_k}\end{cases}$
  - 第k阶段的费用支出：$c(x_k)=\begin{cases}250+100x_k, & x_k\neq 0\\ 0, & x_k=0\end{cases}$
  - 最优值函数：从状态s_k、决策x_k出发的第k阶段以后的最小期望费用

$$f_k(s_k)=\begin{cases}\min\limits_{x_k\in D_k(s_k)}\left\{c(x_k)+\left(\frac{2}{3}\right)^{x_k}f_{k+1}(1)+\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x_k}\right]f_{k+1}(0)\right\}\\ =\min\limits_{x_k\in D_k(s_k)}\left\{c(x_k)+\left(\frac{2}{3}\right)^{x_k}f_{k+1}(1)\right\}, & s_k=1\\ 0, & s_k=0\end{cases}$$

边界条件为$f_4(1)=1500$.

随机性动态规划举例

- **解：**
  - 当$k=3$时：$f_3(0)=0$，$f_3(1)=\min\limits_{x_3\in D_3(s_3)}\left\{c(x_3)+\left(\frac{2}{3}\right)^{x_3}f_4(1)\right\}$，其计算过程及结果见下表：

x_3		$c(x_3)+\left(\frac{2}{3}\right)^{x_3}\times 1500$						$f_3(s_3)$	x_3^*
		0	1	2	3	4	5		
s_3	0	0						0	0
	1	1500	1350	1117	994	946	948	946	4

随机性动态规划举例

- **解：**
  - 当$k=2$时：$f_2(0)=0$，$f_2(1)=\min\limits_{x_2\in D_2(s_2)}\left\{c(x_2)+\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}f_3(1)\right\}$，其计算过程及结果见下表

x_2		$c(x_2)+\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}\times 946$					$f_2(s_2)$	x_2^*
		0	1	2	3	4		
s_2	0	0					0	0
	1	946	981	870	830	837	830	3

随机性动态规划举例

- **解：**
  - 当$k=1$时：$f_1(1)=\min\limits_{x_1\in D_1(s_1)}\left\{c(x_1)+\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}f_2(1)\right\}$，其计算过程及结果见下表

x_1		$c(x_1)+\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}\times 830$					$f_1(s_1)$	x_1^*
		0	1	2	3	4		
s_1	1	830	903	819	796	814	796	3

  - 因此该公司的**最优决策(序列)**为：第一批投产3台；如无合格品，第2批再投产3台；如仍无合格品，第3批投产4台。
  - 这样可使总的期望研制费用(包括三批均不合格时的赔偿费)为最小，共计796元。

动态规划方法的优越性与不足之处

- 优越性
  - 易于确定全局最优解。
    - 即使对于指标函数简单的问题，由于约束集合往往非常复杂，故应用目前的非线性规划方法求解全局最优解是非常困难的。而动态规划方法是把原问题化成一系列结构相似的最优化子问题，而每个子问题的变量个数比原问题少很多，约束集合也简单得多，故易于确定全局最优解。
    - 特别是对于某些最优化问题(如非线性整数规划、离散模型)，其指标函数、状态转移方程和允许决策集合不能用解析形式表达，用解析方法无法求出最优解，而用动态规划却很容易。基于此，目前有相当多的最优化问题，动态规划是求出其全局最优解的唯一方法。
  - 能得到一族解，有利于分析结果。
  - 能利用经验，提高求解效率。

动态规划方法的优越性与不足之处

- 不足之处
  - 尚无一个统一的标准模型可供应用。
  - 应用的局限性（状态变量须满足“无后效性”）。
  - 在数值求解时，存在“维数障碍”。
    - 由于在大多数问题中，函数$\{f_k(s_k)\}$必须以状态s_k集合内格点上的数值来表示，故在计算机上进行计算时，每递推一段，都必须把前一段算出的最优函数值在相应状态集合上的全部值存入内存中。
    - 当状态变量维数增大时，所需内存量成指数倍增长。在计算机内存限制下，超过三维（包括三维）的问题用动态规划方法是不可取的。目前已有不少方法可在一定程度上克服这个维数障碍，但尚无一般的解决办法。

课堂练习：判断题(T/F)

- (1)动态规划计算中的“维数障碍”主要是由于问题中阶段数的急剧增加而引起。 F
- (2)动态规划的基本方程是将一个多阶段决策问题转化为一系列具有递推关系的单阶段决策问题 T
- (3)一个线性规划问题若转化为动态规划问题求解时，应严格按照变量的下标顺序来划分阶段。 F
- (4)在动态规划的基本方程中，凡子问题具有叠加性质的，其边界条件取值均为零；子问题为乘积型的，边界条件取值均为1。 F

Thank you!

谢谢！