运筹与优化
Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

整数规划

第五章

指派问题与匈牙利法

第4节

指派问题的数学模型

- 指派问题(Assignment Problem)
  - 又称分配问题，是一种特殊的整数线性规划问题。
  - 标准形式的指派问题：
    - 假定有n项任务分配给n个工人完成，要求每人完成其中一项，且每项只能由其中一人完成。设工人i完成任务j所需的时间为c_{ij}，应如何分配使总的效率最高(或所需总时间/费用/成本最少)。
    - 一般称矩阵 $C=\left(c_{ij}\right)_{n\times n}$ 为指派问题的效率/费用矩阵。在实际问题中，根据c_{ij}的具体意义，矩阵C可以有不同的含义，如费用、成本、时间等。

指派问题的数学模型

- 标准形式指派问题的数学模型

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = 1, \dots, n \\ x_{ij} = 0 \text{或} 1 \end{cases}$$

每个工人必完成且只完成一个任务

每个任务必有且只有一个工人完成

其中 $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{工人}i\text{完成任务}j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$

指派问题的求解算法—匈牙利法

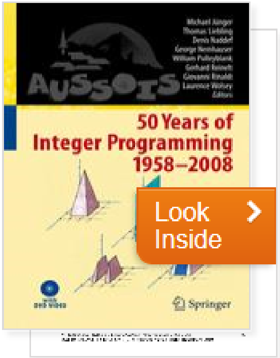
- 相关知识
  - 指派问题是一种特殊的运输问题，可以用求解运输问题的表上作业法求解指派问题。但是，利用指派问题的结构特点，可以有更为简便的解法—匈牙利法。
    - 虽然匈牙利法与运输问题模型无关，但这种算法也是基于单纯形法的。
  - 1955年，库恩(H. W. Kuhn)利用匈牙利数学家D. König关于矩阵中独立零元素定理，提出了一种求解指派问题的算法，称为**匈牙利算法**。后来该算法虽有不断改进，但仍沿用此名称。
    - H. W. Kuhn. The Hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 2(1-2): 83-97, 1955.
    - 独立零元素：矩阵中处于不同行不同列的零元素。

Chapter
50 Years of Integer Programming 1958-2008
pp 29-47

Date: 06 November 2009

The Hungarian Method for the Assignment Problem

Harold W. Kuhn



Abstract

This paper has always been one of my favorite "children," combining as it does elements of the duality of linear programming and combinatorial tools from graph theory. It may be of some interest to tell the story of its origin.

指派问题的求解算法—匈牙利法

- 相关知识
  - **解矩阵**：一个$n \times n$的**标准形式**指派问题的任何可行解由$n \times n$个满足约束条件的数x_{ij}组成，这些x_{ij}中，有n个为1，其余均为0，且这n个1位于**解矩阵**$(x_{ij})_{n\times n}$的不同行不同列，由此确定了n个相应的c_{ij}也位于费用矩阵的不同行不同列上，从而相应可行解的目标函数值由这n个c_{ij}之和确定。
  - 结论：若一$n \times n$指派问题的费用矩阵的所有元素$c_{ij} \geq 0$，且有n个独立零元素，则相应这些独立零元素位置$x_{ij} = 1$，其余$x_{ij} = 0$的解(矩阵)为该指派问题的最优解。
  - **定理1**：若将指派问题费用矩阵$(c_{ij})_{n\times n}$的任一行（或列）各元素分别减去该行（或列）的最小元素，得到新费用矩阵$(c'_{ij})_{n\times n}$，则新指派问题与原指派问题**同解**。
  - **定理2**：矩阵中位于不同行不同列的零元素(即独立零元素)的最多个数等于覆盖所有零元素的最少直线数。

指派问题的求解算法—匈牙利法

- 算法步骤
  - 第一步：变换费用矩阵，使每行每列都出现0元素。
    - (1) 每行减去该行的最小元素；
    - (2) 再从所得费用矩阵的每列减去该列的最小元素。
  - 第二步：进行**试指派**，以寻求最优解。
    - (1) 从零元素最少的行（列）开始，对一个零元素加圈（记作⓪，表示一种指派），同时对同行同列的其他零元素标记∅（以防止接下来的指派落在此行此列上）；如果该行（列）被考虑的零元素（已标记∅的零元素不再考虑）多于一个，则要加圈的零元素所在的列（行）应当是含剩余零元素最少的（表示选择性多的要“**礼让**”选择性小的）。反复进行，直到所有零元素都已圈出和划掉为止。
    - (2) 若**⓪元素的数目$\boldsymbol{m}$**等于**费用矩阵的阶数$\boldsymbol{n}$**，则该指派问题的最优解已得到。若$m < n$，则转入下一步。

指派问题的求解算法—匈牙利法

- 算法步骤
  - **第三步**：作最少的直线覆盖所有零元素，以确定**当前**矩阵中能找到的最多的独立零元素数l。
    - (1) 对没有⓪的行打√号；
    - (2) 对已打√号的行中所有ø元素所在的列打√号；
    - (3) 再对打√号的列中所有⓪元素所在的行打√号；
    - (4) 重复(2)(3)，直到得不出新的打√号的行、列为止；
    - (5) 对没有打√号的行划一横线，对打√号的列划一竖线，从而得到覆盖**当前**矩阵中所有零元素的最少直线数l（=该矩阵的最多独立零元素数）。
    - 若$l < n$, 则转入第四步; 若$l = n$, 而$m < n$, 则回到第二步, 另行试探。
  - **第四步**：变换当前费用矩阵，使之增加新的零元素。
    - 在没有被直线覆盖的元素中找出最小元素，然后将打√号的行的各元素都减去这最小元素，将打√号的列的各元素都加上这最小元素（以保证原来的零元素仍为零元素），得到新费用矩阵（其最优解与原问题的最优解相同），返回第二步。

指派问题的求解算法—匈牙利法

- **例4** 有一份说明书，要分别译成英、日、德、俄四种文字，交甲、乙、丙、丁四个人去完成。因各人专长不同，他们完成翻译不同文字所需的时间（小时）如下表所示。应如何指派，使这四个人分别完成这四项任务所需的总的时间为**最小**。

人员	任务			
	译成英文	译成日文	译成德文	译成俄文
甲	2	10	9	7
乙	15	4	14	8
丙	13	14	16	11
丁	4	15	13	9

指派问题的求解算法—匈牙利法

- **解:**

第一步：变换费用矩阵

$$\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \min \\ 2 \\ 4 \\ 11 \\ 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 5 \end{bmatrix} \\ \min \quad 0 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

指派问题的求解算法—匈牙利法

- **解(续):**

第二步：进行试指派

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 11 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

其中⓪元素数$m = 3 <$矩阵阶数$n = 4$，进入第三步。

(1) 对没有⓪的行打√号；
(2) 对已打√号的行中所有ø元素所在的列打√号；
(3) 再对打√号的列中所有⓪元素所在的行打√号；
(4) 重复(2)(3)，直到得不出新的打√号的行、列为止；
(5) 对没有打√号的行划一横线，对打√号的列划一竖线，从而得到覆盖当前矩阵中所有零元素的最少直线数l（=该矩阵的最多独立零元素数）。

指派问题的求解

- **解(续):**

第三步：作最少的直线覆盖所有零元素

$$
\begin{array}{c c}
\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 11 & 4 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \surd \\ \\ \\ \surd \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \surd & & & \end{array} &
\end{array}
$$

覆盖当前矩阵中所有零元素的最少直线数$l = 3$ <矩阵阶数$n = 4$，转入第四步。

指派问题的求解算法—匈牙利法

在没有被直线覆盖的元素中找出最小元素，然后将打√号的行的各元素都减去这最小元素，将打√号的列的各元素都加上这最小元素（以保证原来的零元素仍为零元素），得到新费用矩阵（其最优解与原问题的最优解相同），返回第二步。

- **解(续):**

第四步：变换当前矩阵，使之增加新的零元素, 返回第二步。

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 11 & 4 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \surd \\ \\ \\ \surd \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \surd & \quad & \quad & \quad \end{array} & \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cancel{0} & 6 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

此时⓪元素数$m = 4$，等于矩阵阶数$n = 4$， 已得最优解。

指派问题的求解算法—匈牙利法

- **解(续):**

最优解对应的解矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即最优指派方案为:

甲→译成德文
乙→译成日文
丙→译成俄文
丁→译成英文

全部所需时间为$4+4+9+11=28h$。

备 注

- 当指派问题的效率矩阵经过变换得到同行和同列中都有两个或两个以上相同数量的零元素时，可以任选一行（列）中某一个零元素，再划去同行同列的其他零元素，这时会出现多重解。
- 对于最大化的指派问题$\max z = \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}$，可令$c'_{ij} = M - c_{ij}$，其中$M$为一足够大的数（通常可取$M = \max\{c_{ij}\}$），使$c'_{ij} \geq 0$，则以$(c'_{ij})_{n\times n}$为费用矩阵的最小化指派问题与以$(c_{ij})_{n\times n}$为费用矩阵的原最大化指派问题有相同的最优解。
- 对于非标准形式的指派问题，可以通过添加适当的行或列，转化为标准形式的指派问题来求解。

备 注

- 多重解示例
  - 设下述矩阵为某一指派问题求解过程中得到的变化后的效率矩阵，进行指派得到：

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & \cancel{0} & 2 \\ 4 & 3 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 8 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & \cancel{0} & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

  - 它有5($=n$)个独立0元素，因此可得到最优解，写出相应的一个最优解矩阵。

备注

- 多重解示例
  - 本示例中还可得到另一指派方案：

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & \cancel{0} & 2 \\ 4 & 3 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 8 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 & \cancel{0} & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

  - 它也有5($= n$)个独立0元素，从而可以得到相应的另一个最优解矩阵。

非标准形式的指派问题

- 对于非标准形式的指派问题，通常的方法是先将其化成标准形式，然后再用匈牙利法求解。
  - 最大化指派问题
    - 见前述处理方法。
  - 工人数和任务数不等的指派问题
    - 可通过添加虚拟的“工人”或“任务”(行或列)来转化成标准形式的指派问题，其中虚拟行或列中的系数可取为0.
  - 一个工人可完成几个任务的指派问题
    - 可将该工人化作相同的几个“工人”来接受指派，这几个“工人”完成同一个任务的费用系数都相同。
  - 某个任务不能由某个工人完成的指派问题
    - 可将相应的费用系数取作充分大的数M。

非标准形式的指派问题

- **例5** 已知6个工厂承担4种任务的指派问题的费用矩阵如下，问应如何分配任务，使总费用最小？

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

非标准形式的指派问题

- 解：

增加两项假想的任务，相应地在原费用矩阵C上增加两个零元素列，得到方阵C'，对C'进行求解，从而可以得到原问题的最优解。

$$C'=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thank you!

谢 谢！