运筹与优化

Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系

2019-2020-2学期

Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

线性规划的对偶理论

第二章

对偶单纯形法

第4节

对偶单纯形法

- 理论基础
  - 由**对偶理论**可知，用**单纯形法**求解线性规划问题时，在单纯形表的*b*列得到原始问题一个基可行解的同时，在检验数行得到对偶问题的一个基解，且两者的目标函数值相等。
- 算法思想
  - **单纯形法**
    - 在保持原始问题(max)为基可行解（这时对偶问题一般为非可行解）的基础上，通过迭代，增大目标函数值，当对偶问题的基解成为可行解时，则原始问题和对偶问题均得到了最优解。
  - **对偶单纯形法**
    - 在保持对偶问题(min)为基可行解（这时原始问题一般为非可行解）的基础上，通过迭代，减小目标函数值，当原始问题的基解成为可行解时，则对偶问题和原始问题均得到了最优解。

通过在原始问题单纯形表上直接求解对偶问题，从而同时解得原始问题。

对偶单纯形法

- 算法原理
  - 设原始问题为 $\{\max z = cX;\ AX = b;\ X \geq 0\}$，并设$B$为原始问题的一个基(未必为可行基)，其对应的基变量为X_B。取非基变量$X_N = 0$，则得到$X_B = B^{-1}b$，列出单纯形表。
  - 若$B^{-1}b$中至少有一个负分量，且单纯形表检验数行的检验数$\sigma = c - c_B B^{-1}A = c - YA \leq 0$，即对偶问题$\{\min \omega = Yb;\ YA \geq c; Y$无约束$\}$可行，考虑继续迭代。
  - 每次迭代是在当前单纯形表的基变量中选取一个负分量x_l离基，按照一定规则选取一个非基变量x_k入基，经基变换，使所有检验数仍保持非正(即保持对偶可行)，而迭代后的目标函数值有所减小。
  - 从原始问题来看，原始问题由非可行解往可行解靠近，当原始问题得到可行解时，便得到了最优解（同时对偶问题也达到最优）。

对偶单纯形法的计算步骤（max）

⑴ 根据线性规划问题，列出初始单纯形表。若b列的数字都为非负，检验数行都为非正,则已得到最优解，停止计算。若b列的数字至少还有一个负分量，检验数行保持非正，则进行以下计算。

先确定
出基变量

⑵ 确定换出变量

$\min\left\{(B^{-1}b)_i \middle| (B^{-1}b)_i < 0\right\} = (B^{-1}b)_l$ 对应的基变量x_l为换出变量。

再确定
入基变量

⑶ 确定换入变量

在单纯形表中检验x_l所在行的各系数$a_{lj}(j=1,\cdots,n)$。若所有$a_{lj}\geq 0$,则无可行解，停止计算。若存在$a_{lj}<0$,计算

此时θ的取值没有限制，从而对偶问题为无界解，故由对偶理论可知，原始问题无可行解。实际上此时单纯新表中x_l所在行对应的约束条件无法满足，故原始问题无可行解。

$$\boxed{\theta = \min_j\left\{\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0\right\} = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}}$$

这里θ并不是原始问题中新入基变量x_k的值，而是对偶问题中新入基变量的值。而$x_k = \frac{(B^{-1}b)_l}{a_{lk}}$

确定非基变量x_k为换入变量（这样才能保持对偶可行）

⑷ 以a_{lk}为主元素，按原单纯形法在表中进行迭代，得到新的计算表。

重复步骤 ⑴ 到 ⑷ 。

对偶单纯形法(max)：设当前基为$B=(P_1,\cdots,P_m)$

重要

$c_j \rightarrow$			c_1	$\cdots$	c_l	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
c_B	X_B	b	x_1	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
c_1	x_1	$\bar{b}_1$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{a}_{1j}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1k}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_l	x_l	$\boxed{\bar{b}_l}$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{a}_{lj}$	$\cdots$	$\bar{a}_{lk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{ln}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_m	x_m	$\bar{b}_m$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\bar{a}_{mj}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$
$c_j - z_j$			0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$c_j - z_j$	$\cdots$	$\boxed{c_k - z_k}$	$\cdots$	$c_n - z_n$

目标函数值增量: $\frac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{lk}}(c_k-z_k)=\bar{b}_l(\frac{c_k-z_k}{\bar{a}_{lk}})$

迭代

$z_k=\sum_{i=1}^{m} c_i \bar{a}_{ik}$

$c_j \rightarrow$			c_1	$\cdots$	c_l	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
c_B	X_B	b	x_1	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
c_1	x_1	$\bar{b}_1-\bar{b}_l\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{lk}}$	1	$\cdots$	$-\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{lk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{a}_{1j}-\bar{a}_{1k}\frac{\bar{a}_{lj}}{\bar{a}_{lk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}-\bar{a}_{1k}\frac{\bar{a}_{ln}}{\bar{a}_{lk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_k	x_k	$\boxed{\frac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{lk}}}$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\bar{a}_{lk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\bar{a}_{lj}}{\bar{a}_{lk}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\bar{a}_{ln}}{\bar{a}_{lk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_m	x_m	$\bar{b}_1-\bar{b}_l\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{lk}}$	0	$\cdots$	$-\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{lk}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\bar{a}_{mj}-\bar{a}_{mk}\frac{\bar{a}_{lj}}{\bar{a}_{lk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}-\bar{a}_{mk}\frac{\bar{a}_{ln}}{\bar{a}_{lk}}$
$c_j - z_j$			0	$\cdots$	$\boxed{-\frac{c_k-z_k}{\bar{a}_{lk}}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$(c_j-z_j)-\frac{\bar{a}_{lj}}{\bar{a}_{lk}}(c_k-z_k)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$(c_n-z_n)-\frac{\bar{a}_{ln}}{\bar{a}_{lk}}(c_k-z_k)$

对偶单纯形法

- **例5** 用对偶单纯形法求解线性规划问题

$$\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **解**：

将该问题化为如下形式，得到原问题的一个对偶可行初始基

$$\max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

列出初始单纯形表，用对偶单纯形法求解，依次得到下列表格：

对偶单纯形法

$c_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	-2	1	-3	0	1
$c_j - z_j$			-2	-3	-4	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-1	0	$-5/2$	$1/2$	1	$-1/2$
-2	x_1	2	1	$-1/2$	$3/2$	0	$-1/2$
$c_j - z_j$			0	-4	-1	0	-1
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	$2/5$	0	1	$-1/5$	$-2/5$	$1/5$
-2	x_1	$11/5$	1	0	$7/5$	$-1/5$	$-2/5$
$c_j - z_j$			0	0	$-9/5$	$-8/5$	$-1/5$

原始问题的最优解为$X^* = (11/5, 2/5, 0, 0, 0)^T$，对偶问题的最优解为$Y^* = (8/5, 1/5)$.

对偶单纯形法的优缺点

- 优点
  - 初始基解可以是非可行解，当对偶可行时，就可进行基的变换，而不需添加人工变量，因此可以简化计算。
  - 对变量较少，而约束条件很多的线性规划问题，可先将其变换为对偶问题，这样使得变量多，而约束条件很少，这时用对偶单纯形法求解就会减少计算工作量。
  - 在灵敏度分析及求解整数规划的割平面法中，有时需要用对偶单纯形法，可以使问题的处理得到简化。
- 缺点
  - 对于大多数线性规划问题，一般很难找到原始问题的一个对偶可行的初始基，因此这种方法在求解线性规划问题时很少单独使用。

课堂练习

- 判断题

(1) 如果将原问题(max型)中约束方程$AX \le b$变成$AX \ge b$，则其对偶问题的唯一改变就是将非负约束$Y \ge 0$变成非正约束$Y \le 0$。 对

(2) 已知y_i^*为线性规划的对偶问题的最优解，若$y_i^* > 0$，则说明在最优生产计划中第i种资源已完全耗尽。 对

(3) 已知y_i^*为线性规划的对偶问题的最优解，若$y_i^* = 0$，则说明在最优生产计划中第i种资源一定有剩余。 错

课 堂 练 习

- 判断题

(4) 若某种资源的影子价格等于k，在其他资源不变的情况下，当该种资源增加5个单位时，相应的目标函数值将增加5k。

错

(5) 应用对偶单纯形法(max)计算时，若单纯形表中某一基变量$x_i < 0$，又x_i所在行的元素全部大于或等于零，则可以判断其对偶问题具有无界解。

对

(6) 用对偶单纯形法求解线性规划问题的每一步，在单纯形表检验数行与基变量列对应得到对偶问题与原始问题的解，将之代入各自目标函数得到的值始终相等。

对

谢 谢！

Thank you!