排队论

第十章

到达时间间隔的分布和服务时间的分布

第2节

经验分布

- 解决排队问题，首先要根据原始资料作出顾客到达时间间隔和服务时间的经验分布，然后按照统计学的方法（例如χ^2检验法）以确定合于哪种理论分布（如泊松分布、负指数分布、爱尔朗分布），并估计它的参数值。
  - 对原始资料进行整理并作出经验分布的实例见《运筹学（第四版）》354-358页的例1和例2.

泊松流

- 泊松流的定义
  - 泊松流(Poisson flow)，也称最简单流、 Poisson过程，是指在长度为t的时间区间[0,t)内到达的顾客数$N(t)$为n的概率服从参数为λt的泊松分布(Poisson distribution)，即

$$P_n(t) = P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, t > 0, n = 0,1,2,\ldots$$

- 顾客的到达形成泊松流的三个条件
  - 平稳性
    - 在一定时间区间内，到达的顾客数的概率仅与这段时间区间的长短有关，而与这段时间区间的起始时刻无关。
  - 无后效性
    - 在不相交的时间区间内到达的顾客数是相互独立的。
  - 普通性
    - 在充分小的时间区间内，只能有一个顾客到达，不存在批量到达（2个或2个以上同时到达）的情况。

备注：实际问题中的流往往只是近似符合上述三个条件，由于泊松流容易处理，因此排队论中大量研究的是泊松流的情况。

泊松流

- 泊松流的一些性质
  - 服从参数为λt的泊松分布的随机变量的期望值和方差相等，且都等于λt 。
    - 期望值和方差相等，是泊松分布的一个重要特征，可利用它对一个经验分布是否合于泊松分布进行初步识别。
    - λt为长度为t的时间区间内平均到达的顾客数。
    - λ为单位时间内平均到达的顾客数，也称到达率 (arrival rate)。
  - 对于充分小的Δt (和任意的时刻t)，在$[t, t+\Delta t]$时间内有一个顾客到达的概率与时刻t无关，而约与区间长度Δt成正比，即

$$P(N_{\Delta t} = 1) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

有多于一个顾客到达的概率为

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\Delta t} = n) = o(\Delta t)$$

没有顾客到达的概率为

$$P(N_{\Delta t} = 0) = \frac{(\lambda\Delta t)^0}{0!} e^{-\lambda\Delta t} = e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

负指数分布

- 负指数分布的定义
  - 随机变量T的概率密度函数是

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, 0 \le t < \infty$$

则称T服从参数为λ的负指数分布，其分布函数为

$$F_T(t) = P(T \le t) = \int_0^t f_T(t)\mathrm{d}t = 1 - e^{-\lambda t}, 0 \le t < \infty$$

数学期望为

$$E[T] = \frac{1}{\lambda},$$

方差为

$$Var[T] = \frac{1}{\lambda^2},$$

标准差为

$$\sigma[T] = \frac{1}{\lambda}.$$

负指数分布

- 负指数分布的性质
  - **无记忆性**：设T服从负指数分布，则对任意的$t \geq 0, h \geq 0$, 有

$$P(T > t + h | T \geq t) = P(T > h)$$

- **证明**：

由定义可知

$$P(T > h) = \int_h^\infty \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = [-e^{-\lambda t}]|_h^\infty = e^{-\lambda h}$$

又 $P(T > t + h | T \geq t) = \frac{P(T > t + h \cap T \geq t)}{P(T \geq t)}$，而由上式可得

$$P(T > t + h \cap T \geq t) = P(T > t + h) = e^{-\lambda(t+h)},$$

又

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$$

因此

$$P(T > t + h | T \geq t) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T > h)$$

负指数分布

- 负指数分布的性质
  - **无记忆性**：设T服从负指数分布，则对任意的$t \geq 0, h \geq 0$，有

$$P(T > t + h | T \geq t) = P(T > h)$$

  - **解释**：
    若T表示**相继顾客到达的时间间隔**，则该性质说明：假设在过去的t小时里没有顾客到达(这相当于$T \geq t$)，则在接下来的h小时里无顾客到达(这相当于$T > t + h$)的概率与t的值无关，且对任意的t值，相应概率均等于$P(T > h)$。
    - 换句话说：假设自上一个顾客到来起已逝去至少 t 个单位时间，则至下一个顾客到来为止剩余时间h的分布与已逝去的时间t无关。

负指数分布

- 负指数分布的性质
  - 顾客相继到达的时间间隔服从参数为λ的负指数分布，当且仅当在长度为t的时间区间内到达的顾客数服从参数为λt的泊松分布。
    - **证明：**

      设在长度为t的时间区间内到达的顾客数服从参数为λt的泊松分布，则在该段时间内至少有一个顾客到达的概率为

$$1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$$

      这等价于 $P\{T \leq t\} = F_T(t)$，结论得证。

负指数分布

- 备注
  - 对于**泊松流**，参数λ称为**到达率**(arrival rate)，即单位时间内平均到达的顾客数，因此 $\frac{1}{\lambda}$ 为相继顾客到达的平均间隔时间，而这正与$E[T]$的意义一致。
  - 相继到达时间间隔是独立且相同的负指数分布（概率密度函数为$\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$）与输入过程为泊松流（参数为λ）是等价的，因此在Kendall记号中就都用M来表示。
  - **服务时间v的分布**，即对一顾客的服务时间，也即**在忙期**相继离开系统的两顾客的间隔时间, 有时也服从**负指数分布**，这时它的分布函数和概率密度函数分别为

$$F_v(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad f_v(t) = \mu e^{-\mu t}$$

其中，μ表示单位时间内平均能被服务完成的顾客数，称为**平均服务率**；$\frac{1}{\mu} = E(v)$表示对一个顾客的平均服务时间。这里的“平均”是指期望值。

爱尔朗分布

- 定义
  - 随机变量T的概率密度函数为

$$b_k(t) = \frac{R(Rt)^{k-1}e^{-Rt}}{(k-1)!} \quad (t \geq 0)$$

则称服从参数为R和k的(k阶)爱尔朗分布。

它的期望值和方差分别为

$$E[T] = \frac{k}{R}, \quad Var[T] = \frac{k}{R^2}$$

Haiyan Lu 5/26/2020
Jiangnan University

爱尔朗分布

- 备注
  - 设$v_1, v_2, \dots, v_k$是k个相互独立的随机变量，服从参数同为$k\mu$的负指数分布，则随机变量$T = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$服从参数为$R = k\mu$的**$k$阶爱尔朗分布**，即$T$的概率密度函数为

$$b_k(t) = \frac{k\mu(k\mu t)^{k-1} e^{-k\mu t}}{(k-1)!}$$

它的期望值和方差分别为

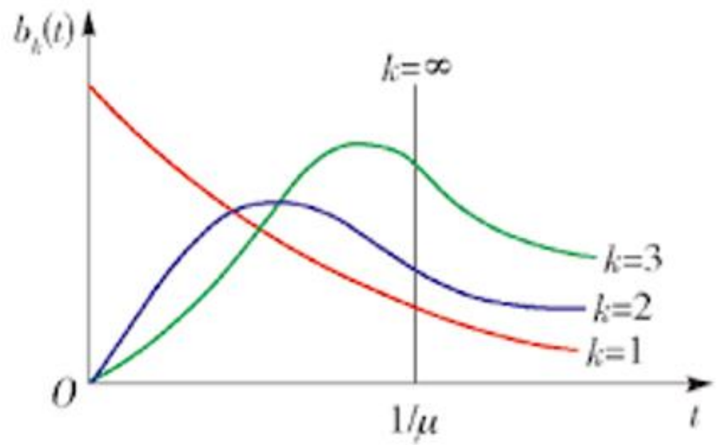
$$E[T] = \frac{k}{R} = \frac{1}{\mu}, \quad Var[T] = \frac{k}{R^2} = \frac{1}{k\mu^2}$$

(注：$E[v_i] = \frac{1}{k\mu}, i = 1,2,\dots,k$)

- **举例**：**串列的k个服务台**，每台服务时间相互独立，服从相同的负指数分布（参数为$k\mu$），则一顾客走完这k个服务台总共所需服务时间就服从上述的**k阶爱尔朗分布**。

爱尔朗分布

- 备注
  - 爱尔朗分布族提供了更为广泛的模型类，比负指数分布有更大的适应性（见下图）：
    - $k=1$时, 爱尔朗分布即为负指数分布, 可看做是完全随机的；
    - 当k增大时，爱尔朗分布的图形逐渐变为对称的；
    - 当$k \geq 30$时，爱尔朗分布近似于正态分布；
    - 当$k \to \infty$时，$Var[T] \to 0$, 这时爱尔朗分布化为确定型分布；
    - 因此，一般k阶爱尔朗分布可看成是完全随机与完全确定的中间型，能对现实世界提供更为广泛的适应性。



Thank you!

谢 谢！