运筹与优化
Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

线性规划的对偶理论

第二章

对偶问题的基本性质

第2节

对偶问题的基本性质

设有互为对偶的一对线性规划问题，下述基本性质成立：

- 对合性(对称性)
- 弱对偶性
- 最优性
- 强对偶性
- 无界性
- 对偶基本定理
- 互补松弛性
- 基解的对应关系

下面就**对称形式**的一对对偶问题进行说明。对于其他形式的对偶问题这些基本性质也成立，但具体表达形式可能会有所不同。

对偶问题的基本性质

- **对合性（Involutory property of duality）（对称性）**
  - 对偶的对偶是原始问题。

证明：

设原始问题为

$$\max z = cX; AX \leq b; X \geq 0$$

则其对偶问题为

$$\min \omega = Yb; YA \geq c; Y \geq 0$$

上述问题等价于

$$\max(-\omega) = -Yb; -YA \leq -c; Y \geq 0$$

由对称形式对偶关系，得其对偶问题为

$$\min(-z') = -cX; -AX \geq -b; X \geq 0$$

它等价于

$$\max z = cX; AX \leq b; X \geq 0$$

此即原始问题。

对偶问题的基本性质

特别地，求最大值问题任意可行解的目标函数值给出了求最小值问题目标函数值的一个下界，求最小值问题任意可行解的目标函数值给出了求最大值问题目标函数值的一个上界 。

- **弱对偶性**
  - 若$\bar{X}$和$\bar{Y}$分别是原始问题$\{\max z = cX; AX \le b; X \ge 0\}$及其对偶问题$\{\min \omega = Yb; YA \ge c; Y \ge 0\}$的任意可行解,则$c\bar{X} \le \bar{Y}b$.

证明:

由题设可知

$$c \le \bar{Y}A, \qquad \bar{X} \ge 0$$

因此有

$$c\bar{X} \le \bar{Y}A\bar{X}$$

又

$$A\bar{X} \le b, \qquad \bar{Y} \ge 0$$

故有

$$\bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b$$

从而得到

$$c\bar{X} \le \bar{Y}b$$

弱对偶性是指对于一对互为对偶的线性规划，求最大值的线性规划的任意可行解的目标函数值不大于求最小值的线性规划的任意可行解的目标函数值。
不能简单理解为原始问题任意可行解的目标函数值不大于对偶问题任意可行解的目标函数值。

对偶问题的基本性质

弱对偶性
的一个推论

- **最优性**

(可行解为最优解的充分条件)

  - 设$\hat{X}$和$\hat{Y}$分别是原始问题$\{\max z = cX; AX \leq b; X \geq 0\}$及其对偶问题$\{\min \omega = Yb; YA \geq c; Y \geq 0\}$的的**可行解**，若$c\hat{X} = \hat{Y}b$，则$\hat{X}, \hat{Y}$分别为相应问题的**最优解**.

证明：

设X^*和Y^*分别是原始问题及其对偶问题的最优解，则由**弱对偶性**可知

$$c\hat{X} \leq cX^* \leq Y^*b \leq \hat{Y}b$$

由已知条件$c\hat{X} = \hat{Y}b$，从而得到

$$c\hat{X} = cX^* = Y^*b = \hat{Y}b$$

因此，$\hat{X}, \hat{Y}$分别为相应问题的最优解。

对偶问题的基本性质

备注：根据强对偶性以及前述的最优性性质，可得如下结论：
设$\hat{X}$是原问题$\max z = cX; AX \le b; X \ge 0$的可行解，$\hat{Y}$是其对偶问题$\min \omega = Yb; YA \ge c; Y \ge 0$的可行解，则$\hat{X}, \hat{Y}$为最优解当且仅当$c\hat{X} = \hat{Y}b$.

- **强对偶性（对偶定理）**
  - 在一对互为对偶的线性规划问题中，若其中一个问题有最优解，则另一问题也有最优解，且两者的最优目标函数值相等。

证明：

设$\hat{X}$是原始问题$\{\max z = cX; AX \le b; X \ge 0\}$的最优解，且不妨设$\hat{X}$是**最优基可行解**，其对应的最优基为$B$，因此有

$$\hat{X}_B = B^{-1}b,\ c - c_B B^{-1} A \le 0,\ -c_B B^{-1} \le 0$$

令$\hat{Y} = c_B B^{-1}$，则有

$$\hat{Y}A \ge c, \qquad \hat{Y} \ge 0$$

故$\hat{Y}$为原始问题的对偶问题$\{\min \omega = Yb; YA \ge c; Y \ge 0\}$的可行解，且有

$$\hat{Y}b = c_B B^{-1} b = c_B \hat{X}_B = c\hat{X}$$

故由**最优性**可知，$\hat{Y}$为对偶问题的最优解，且原始问题及其对偶问题的最优目标函数值相等。

对偶问题的基本性质

弱对偶性
的一个推论

- 无界性
  - 在一对互为对偶的线性规划问题中，若其中一个问题为无界解，则另一个问题无可行解。（反之不然）

证明：

用**反证法**。

不妨设原始问题为无界解，$X^{(0)}$为其可行解，且不妨设原始问题为求最大化，对偶问题为求最小化。

假设对偶问题有可行解，设为$Y^{(0)}$。

则由**弱对偶性**可得

$$cX^{(0)} \le Y^{(0)}b$$

这与题设原始问题为无界解**矛盾**。因此结论成立。

对偶问题的基本性质

弱对偶性
的一个推论

- 无界性
  - 在一对互为对偶的线性规划问题中，若其中一个问题为无界解，则另一个问题无可行解。（反之不然）
- 备注：这个命题的逆命题不成立。
  - 当一对互为对偶问题中的一个问题无可行解时，另一个问题未必为无界解。此时，另一个问题可能为**无界解**，也可能**无可行解**。
  - 举例如下，这一对对偶问题均无可行解（可用**图解法**求解验证）

原始问题（对偶问题）	对偶问题（原始问题）
$\max z = y_1 + y_2$ $\begin{cases} y_1 - y_2 \le -1 \\ -y_1 + y_2 \le -1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$	$\min \omega = -x_1 - x_2$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

对偶问题的基本性质

- **对偶基本定理（The Fundamental Theorem of Duality）**
  - With regard to the primal and dual linear programming problems, exactly one of the following statements is true:
    1. Both possess optimal solutions X^* and Y^* with $cX^* = Y^*b$.
    2. One problem has an unbounded optimal objective value, in which case the other problem must be infeasible.
    3. Both problems are infeasible.

备注：详见《**Linear Programming and Network Flows**》, 4th edition, by Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, Hanif D. Sherali (John Wiley & Sons)

对偶问题的基本性质

在线性规划问题的**最优解**中，若对应某一约束条件的对偶变量值非零，则该约束条件取严格等式；反之，若约束条件取严格不等式，则其对应的对偶变量一定为零。

- **互补松弛性**
  - 设$\hat{X}$和$\hat{Y}$分别是原始问题$\{\max z = cX; AX \le b; X \ge 0\}$及其对偶问题$\{\min \omega = Yb; YA \ge c; Y \ge 0\}$的**任意可行解**，则$\hat{X}, \hat{Y}$分别为**最优解当且**仅当$\hat{Y}X_s = 0$和$Y_s\hat{X} = 0.$

证明：

将两个问题化为标准形式，有

$$\max z = cX; AX + X_s = b; X, X_s \ge 0$$

$$\min \omega = Yb; YA - Y_s = c; Y, Y_s \ge 0$$

将$c = YA - Y_s, b = AX + X_s$代入上面的目标函数，得到

$$z = cX = (YA - Y_s)X = YAX - Y_sX$$

$$\omega = Yb = Y(AX + X_s) = YAX + YX_s$$

对偶问题的基本性质

- **互补松弛性**
  - 设$\hat{X}$和$\hat{Y}$分别是原始问题$\{\max z = cX; AX \le b; X \ge 0\}$及其对偶问题$\{\min \omega = Yb; YA \ge c; Y \ge 0\}$的**任意可行解**，则$\hat{X}, \hat{Y}$分别为最优解**当且**仅当$\hat{Y}X_s = 0$和$Y_s\hat{X} = 0.$

证明（续）：

若$\hat{X}, \hat{Y}$分别为原始问题和对偶问题的最优解，则由**强对偶性**，有

$$c\hat{X} = \hat{Y}b$$

从而有

$$\hat{Y}b - c\hat{X} = \left(\hat{Y}A\hat{X} + \hat{Y}X_s\right) - \left(\hat{Y}A\hat{X} - Y_s\hat{X}\right) = \hat{Y}X_s + Y_s\hat{X} = 0$$

又$\hat{Y}, X_s, Y_s, \hat{X} \ge 0$，故必有$\hat{Y}X_s = 0$ 和$Y_s\hat{X} = 0.$

若任意可行解$\hat{X}, \hat{Y}$满足$\hat{Y}X_s = 0$和$Y_s\hat{X} = 0$，则由前述讨论，有

$$c\hat{X} = \hat{Y}A\hat{X} = \hat{Y}b$$

故由**最优性**可知，$\hat{X}, \hat{Y}$为最优解。

对偶问题的基本性质

- 备注

互补松弛性给出了已知一个线性规划问题最优解时求其对偶问题最优解的方法，即已知Y^*求X^*或已知X^*求Y^*。$Y^*X_s=0$和$X^*Y_s=0$两式称为互补松弛条件。

将互补松弛条件写成下式

$$\boxed{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{m} y_i^* x_{s_i} = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} y_{s_j} x_j^* = 0\end{array}}$$

由于（在一对互为对偶的正则形式线性规划问题中）变量都为非负，要使上述和式为零，则必定其中每一项为零，因此得到下述关系：

（1）当$y_i^* > 0$时，必有$x_{s_i} = 0$，即$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i$；反之当$x_{s_i} > 0$，即$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i$时，必有$y_i^* = 0$；

（2）当$y_{s_j} > 0$，即$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j^* > c_j$时，必有$x_j^* = 0$；反之当$x_j^* > 0$时，必有$y_{s_j} = 0$，即$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j^* = c_j$.

利用上述关系，建立关于对偶问题（或原始问题）的一组线性方程组，求解可得相应问题最优解。

对偶问题的基本性质

- 基解的对应关系
  - 正则形式的线性规划原始问题及其对偶问题的基解之间存在如下互补对应关系：
    - 在任一对互补对应基解中，原始问题基解的松弛变量对应对偶问题基解的原有变量，原始问题基解的原有变量对应对偶问题基解的松弛变量。
    - 任一对互补对应基解中的变量若在其中一个问题的基解中是基变量，则其互补变量在另一问题的基解中是非基变量。
    - 任一对互补对应基解满足互补松弛条件。
    - 任一对互补对应基解的目标函数值相等，即$z = w$。

对偶问题的基本性质

- 基解的对应关系
  - 设**正则形式**的原始问题和对偶问题的标准形式分别为

$$\max z = cX; AX + X_s = b; X, X_s \geq 0$$

$$\min \omega = Yb; YA - Y_s = c; Y, Y_s \geq 0$$

  - 在原始问题**单纯形表**（设当前基为B，**可行或不可行**）的b列得到原始问题的一个基解的同时，在检验数行（取相反数）得到对偶问题的一个基解，这两个解构成**一对互补的基解**，且其相应的目标函数值相等。

对偶问题的基本性质

- **基解的对应关系**
  - 当前单纯性表中互补基解对之间的对应关系如下：

（其中$Y_s = (Y_{s_1}, Y_{s_2})$，$A = (B, N)$，N是A中不在**当前基**B中的部分）

原有变量 松弛变量

基变量 非基变量

原始问题	b	X_B	X_N	X_s
X_B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	B^{-1}
$\sigma_j = c_j - z_j$		0	$c_N - c_B B^{-1} N$	$-c_B B^{-1}$
对偶问题		$-Y_{s_1}$	$-Y_{s_2}$	$-Y$

非基变量 基变量

松弛变量 原有变量

对偶理论的应用

应用线性规划**对偶理论**中弱对偶性、强对偶性和互补松弛性等性质，由一个问题的最优解确定另一个问题的最优解，或确定一个问题无最优解。

- **例3** 已知线性规划问题

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

试用**对偶理论**证明上述线性规划问题具有无界解。

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

对偶理论的应用

- **证明：**

注意到原始问题存在可行解，比如$(0,0,0)^T$为可行解。

该问题的对偶问题为

$$\min \omega = 2y_1 + y_2$$
$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \ge 1 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 0 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

由第一个约束条件可知，对偶问题无可行解，从而原始问题无最优解（否则，若原始问题有最优解，则由**强对偶性**可推出对偶问题也有最优解，矛盾！）。

而原始问题有可行解，故实际上原始问题有无界解。

对偶理论的应用

- **例4** 设有线性规划问题

$$\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

已知其对偶问题的最优解为

$$y_1^* = 4/5\,, y_2^* = 3/5\,, z^* = 5$$

用对偶理论找出该问题的最优解。

对偶理论的应用

$$\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

- **解:**

该问题的对偶问题为

$$\max z = 4y_1 + 3y_2$$
$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 & ① \\ y_1 - y_2 \leq 3 & ② \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 5 & ③ \\ y_1 + y_2 \leq 2 & ④ \\ 3y_1 + y_2 \leq 3 & ⑤ \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

将$y_1^* = 4/5$，$y_2^* = 3/5$的值代入约束条件可知，②③④式为严格不等式，由互补松弛性得

$$x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$$

对偶理论的应用

- **解:**

由于

$$y_1^* > 0, \qquad y_2^* > 0$$

故再由互补松弛性可知，原始问题的两个约束条件在最优解处应取等式，故有

$$x_1^* + 3x_5^* = 4$$
$$2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解可得

$$x_1^* = 1，\ x_5^* = 1$$

故该问题的最优解为

$$X^* = (1,0,0,0,1)^T$$

最优值为

$$\omega^* = z^* = 5$$

课堂练习

- 1、判断下列说法是否正确，为什么？
  - （1）若线性规划的原始问题存在可行解，则其对偶问题也一定存在可行解。 错
  - （2）若线性规划的对偶问题无可行解，则原始问题也一定无可行解。 错
  - （3）在一对互为对偶的线性规划问题中，不管原始问题是求最大或最小，原始问题可行解的目标函数值不超过其对偶问题可行解的目标函数值。 错
  - （4）任何线性规划问题具有唯一的对偶问题。 对

课堂练习

- 2、已知线性规划问题

$$\max z = x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

试用**对偶理论**证明上述线性规划问题无最优解。

$$\max z = x_1 - x_2 + x_3$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

课堂练习

- **证明**：

注意到原始问题存在可行解，比如$(5,0,0)^T$为可行解。

该问题的对偶问题

$$\min \omega = 4y_1 + 3y_2$$
$$\begin{cases} y_1 \qquad + y_2 \geq 1 \\ \qquad\quad -y_2 \geq -1 \\ -y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ y_1, y_2 \leq 0 \end{cases}$$

由第一个约束条件可知，对偶问题无可行解，从而原始问题无最优解（否则，若原始问题有最优解，则由**强对偶性**可推出对偶问题也有最优解，矛盾！）。

又原始问题有可行解，故实际上原始问题有无界解。

谢 谢！

Thank you!