# 运筹与优化
# Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

# 线性规划与单纯形法

第一章

# 图解法

第3节

# 基本概念和思路

- 线性规划的图解法
  - 线性规划的图解法就是用几何作图的方法分析并求出其最优解的过程。
  - 对模型中只有2个变量的线性规划问题，可以通过图解法来求解。
  - 图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理。
- 图解法的思路
  - 先将约束条件加以图解，求得满足约束条件的解（即可行解）的集合（即可行域），然后结合目标函数的要求从可行域中找出最优解。

# 图解法的步骤

- 图解法的步骤可概括为如下四个步骤：
  - 建立平面直角坐标系，标出坐标原点、坐标轴方向和单位长度；
  - 对约束条件加以图解，找出可行域或判别是否存在可行域；
  - 绘制目标函数的等值线；
  - 结合目标函数的要求确定最优解。

# 图解法举例

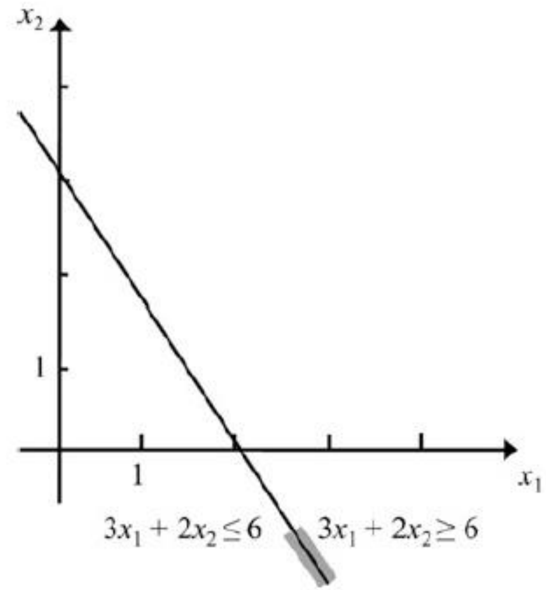
- 备注：

As a matter of fact, a $\leq$ or $\geq$ inequality will refer to the set of points on the line and all points in one of the two *halfplanes* generated by the line. The obvious question is then which of the two halfplanes is addressed by the constraint in question. Some people might believe that the halfplanes that belong to $\leq$ inequalities are below the line, while those of $\geq$ are above the line. This is not true, as each $\leq$ inequality can be rewritten as an equivalent $\geq$ inequality. In our example, the constraint $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ is equivalent to its counterpart $-3x_1 - 2x_2 \geq -6$. Both constraints define exactly the same set of points.

# 图解法举例

- 备注：

**Fig. 2.3** Hyperplane and halfspaces




A simple way to determine the proper halfplane is to choose any point that is not located on the line we have plotted and determine whether or not it satisfies the constraint in question. If so, then the point is located on the proper side of the line, otherwise the halfplane is on the other side. In our example, consider, for instance, the origin as a point. Its coordinates are (0, 0), so that the constraint $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ reduces to $0 \leq 6$, which is correct. This means that the origin is on the "correct" side of the line, which allows us to determine the halfplane as being on the lower left side of the line. Had we chosen the point, say, (4, 2) instead, our constraint would have been $3(4) + 2(2) \leq 6$ or $16 \leq 6$, which is wrong, meaning that the point (4, 2) is located on the "wrong" side of the line. As a matter of fact, the set of points on the line and in the halfplane to the upper right of the line is determined by the constraint $3x_1 + 2x_2 \geq 6$. Figure 2.3 shows both the hyperplane and both halfplanes for all three types of constraints allowed in linear programming: $=$, $\leq$, and $\geq$.

# 图解法举例

- 以**例2**为例：

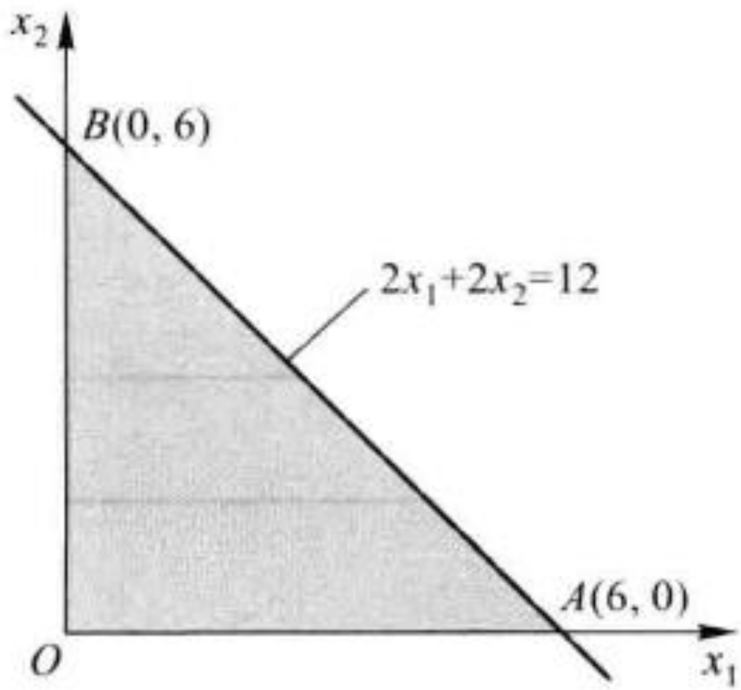
$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

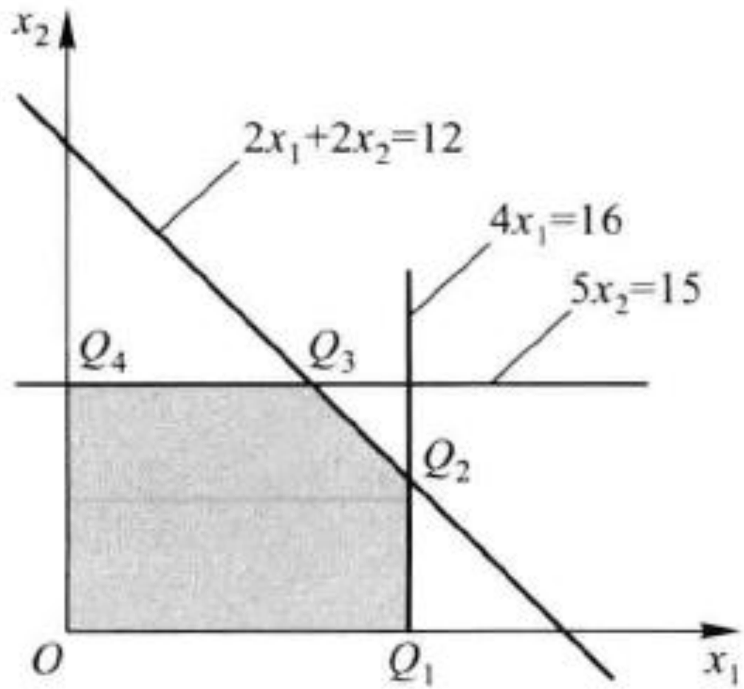
$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \qquad\quad\;\; \le 16 \\ \qquad\quad 5x_2 \le 15 \\ x_1, \qquad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \qquad\quad \le 16 \\ \qquad\quad 5x_2 \le 15 \\ x_1, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

# 图解法举例

- 建立平面直角坐标系，标出坐标原点、坐标轴方向和单位长度；
- 对约束条件加以图解，找出可行域；

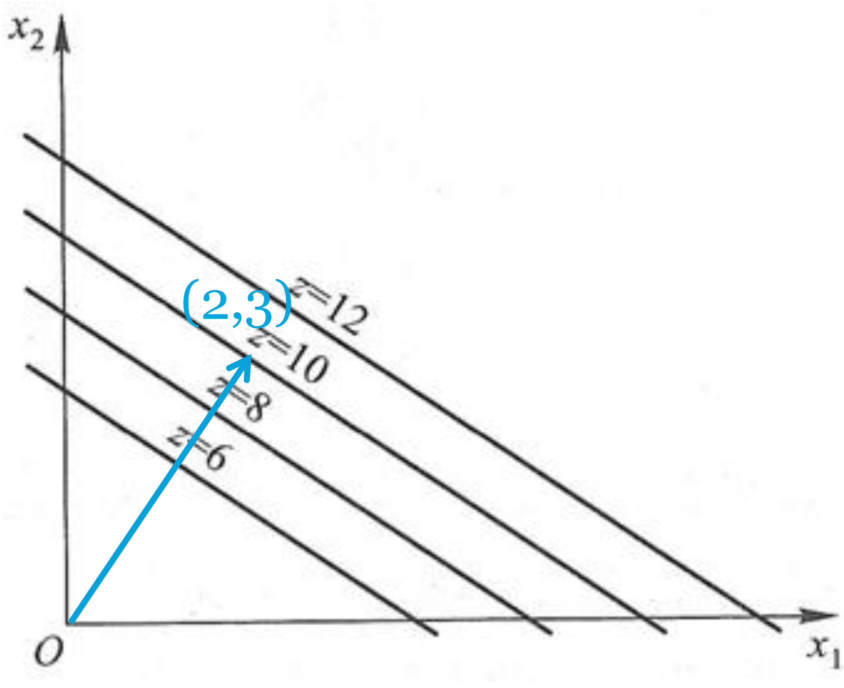


# 图解法举例

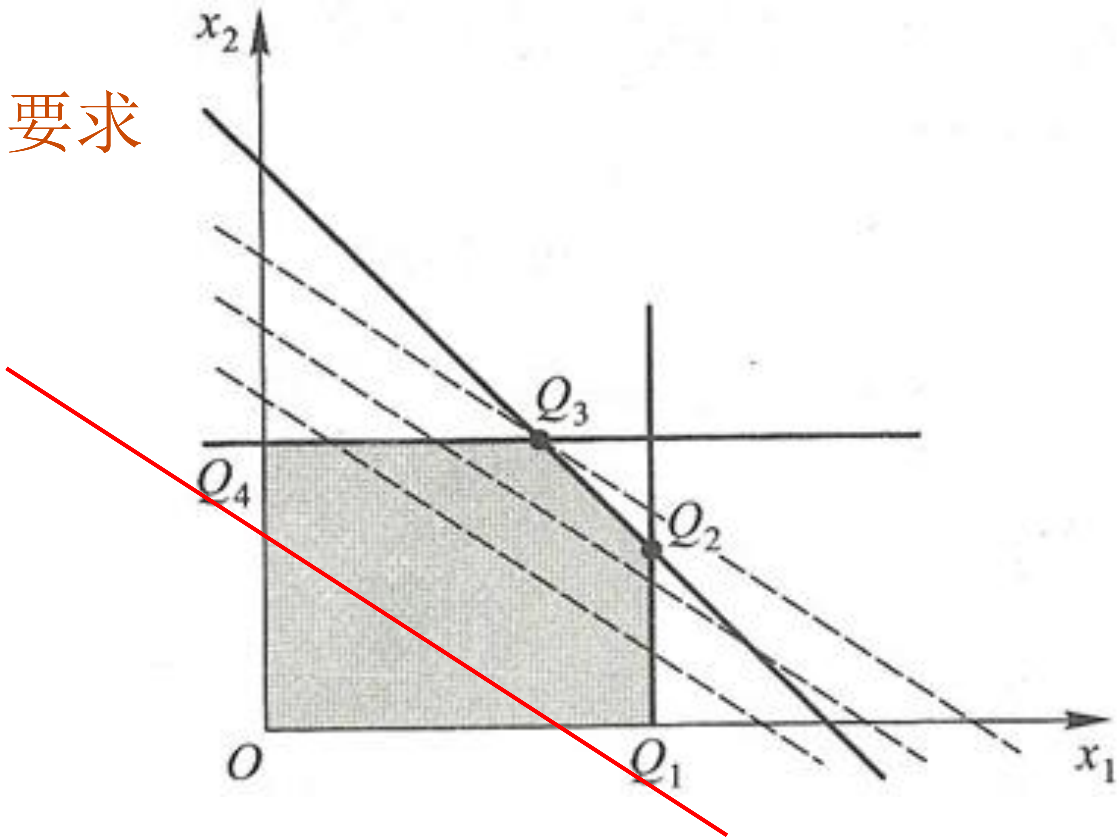
- 绘制目标函数的等值线：

将目标函数$z=2x_1+3x_2$改写为$x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{z}{3}$，此即参量为$z$、斜率为$-\frac{2}{3}$的一族平行直线，如下图所示：



# 图解法举例

- 结合目标函数的要求确定最优解。

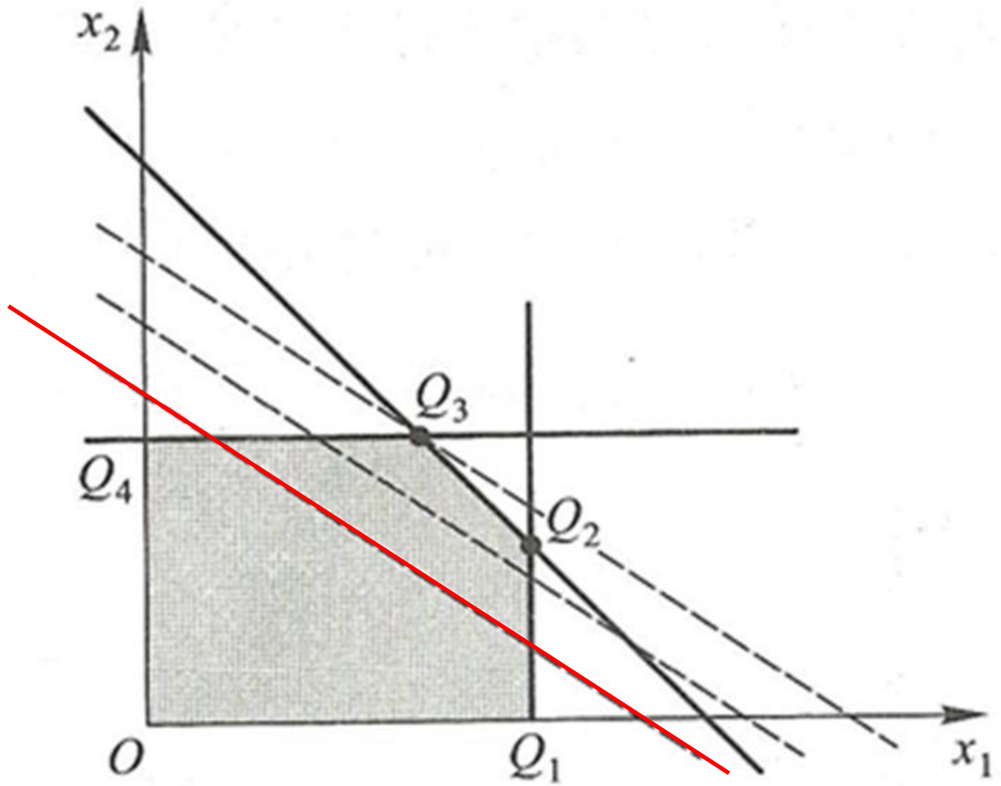



有唯一**最优解**：$Q_3$，即$(x_1, x_2) = (3,3)$

目标函数**最优值**$z^* = 15.$

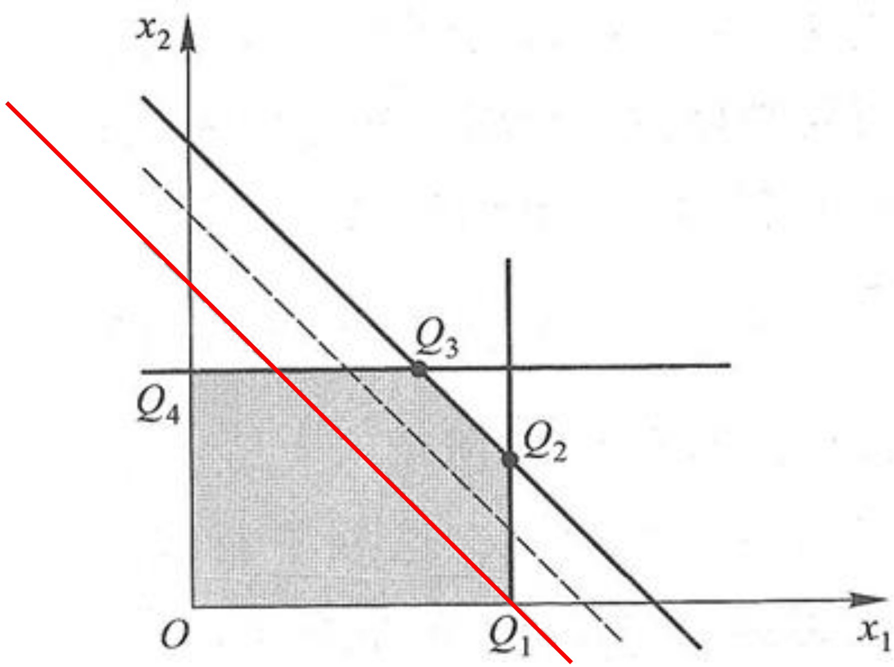
# 线性规划问题中解的几种情形

- （1）唯一最优解
  - 示例：如**例2**图解法所示



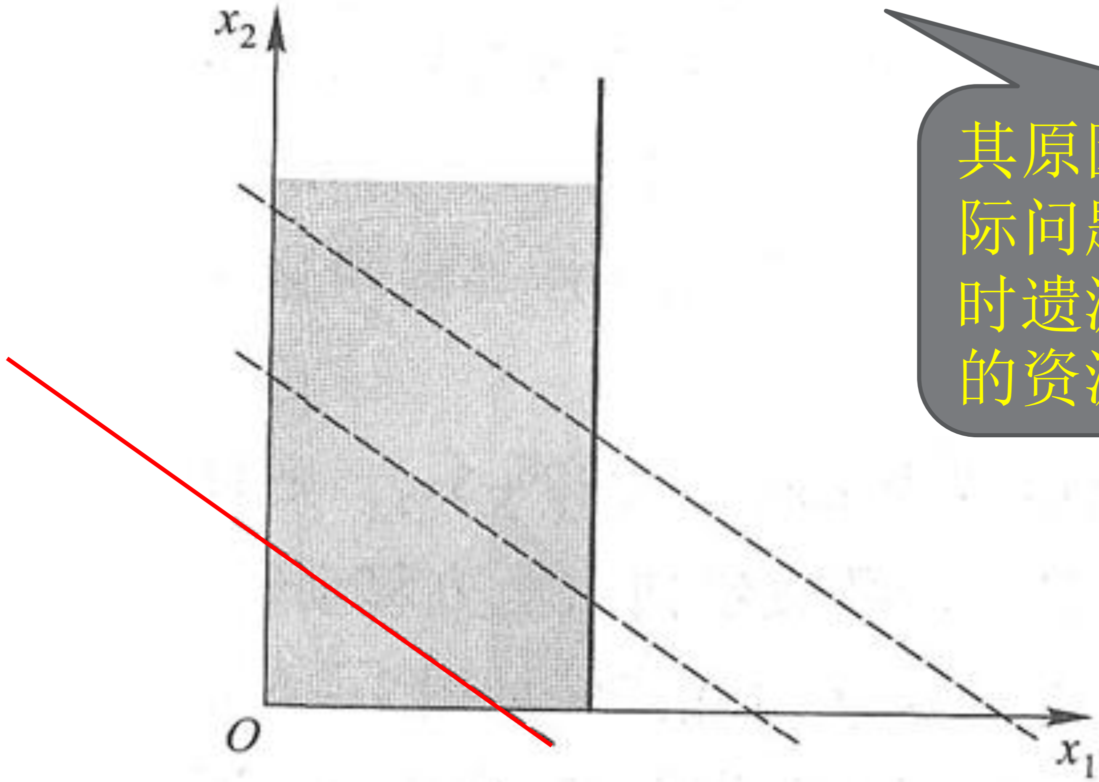
# 线性规划问题中解的几种情形

- （2）无穷多最优解
  - 示例：上例中目标函数改为 $z=3x_1+3x_2$，则其图形恰好与约束条件$2x_1+2x_2\leq 12$的边界线平行，此时点$Q_2$、$Q_3$及线段$Q_2Q_3$上的任一点都使目标函数值达到最大，即该线性规划问题有**无穷多最优解**，也称具有**多重最优解**。



# 线性规划问题中解的几种情形

- （3）无界解（无最优解）
  - 示例：将约束条件$2x_1 + 3x_2 \leq 12$和$5x_2 \leq 15$从**例2**中去掉，所得线性规划**问题具有无界解**或**无最优解**。



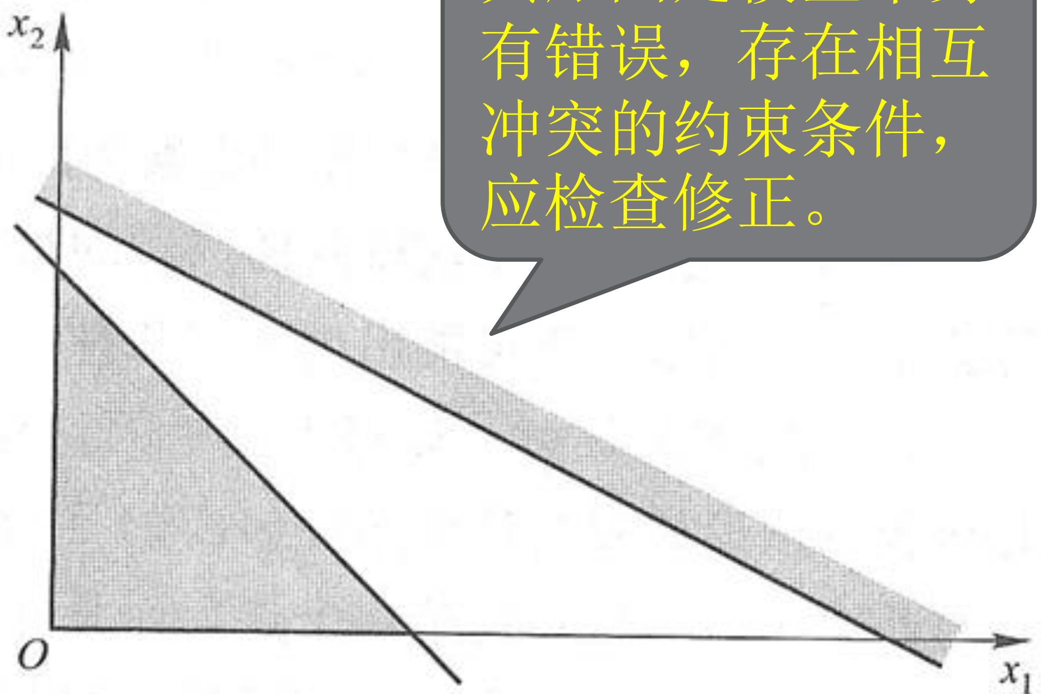

其原因是在建立实际问题的数学模型时遗漏了某些必要的资源约束。

# 线性规划问题中解的几种情形

- （4）无可行解（无最优解）
  - 示例：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$




其原因是模型本身有错误，存在相互冲突的约束条件，应检查修正。

# 几点启示

- 1、线性规划问题解的情况有四种：
  - 唯一最优解
  - 无穷多最优解
  - 无界解（无最优解）
  - 无可行解（无最优解）
- 2、若线性规划问题的可行域非空，则其可行域为有界或无界的凸多边形。
- 3、若线性规划问题存在最优解，则其最优解或最优解之一（如果有无穷多的话）一定在可行域的某个顶点得到；若在两个顶点同时得到最优解，则它们连线上的任意一点都是最优解，即有无穷多最优解。

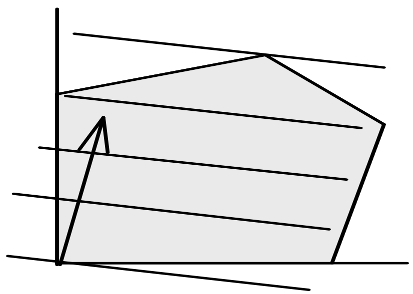
# 几点启示

- 4、**单纯形法**求解线性规划问题的思路：
  - 先找出可行域的任一顶点，计算在该顶点处的目标函数值。
  - 比较该顶点周围相邻顶点的目标函数值是否更优。
    - 若否，则该顶点就是最优解的点（或之一）；
    - 否则，转到比该顶点目标函数值更优的另一相邻顶点；
    - 重复上述过程，直到找出使目标函数值达到最优的顶点为止。

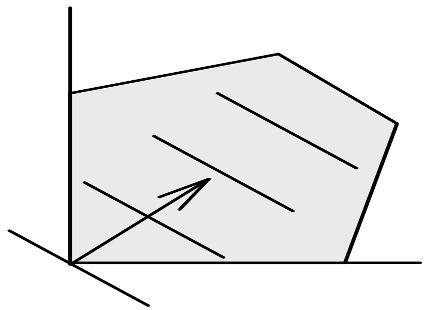
目标函数求最大化，向量方向为目标函数的梯度方向。

# 课堂练习

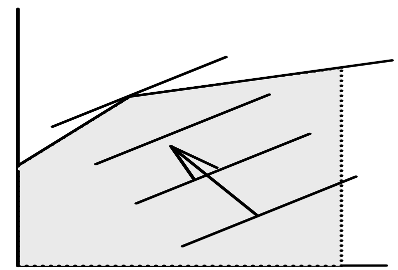
- 1、指出下列线性规划问题的可行域和最优解的情况：



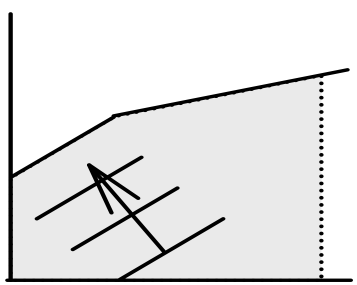
(a)



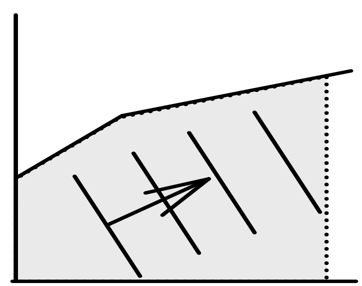
(b)



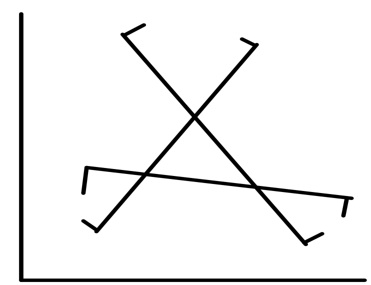
(c)



(d)



(e)

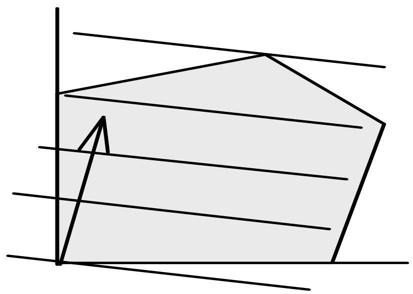


(f)

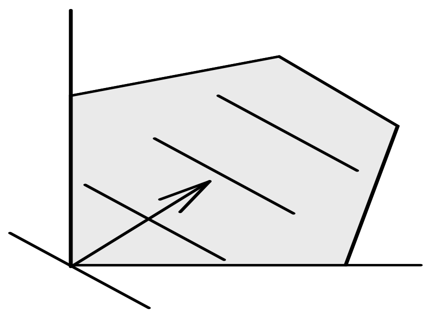
# 课堂练习

目标函数求最大化，向量方向为目标函数的梯度方向。

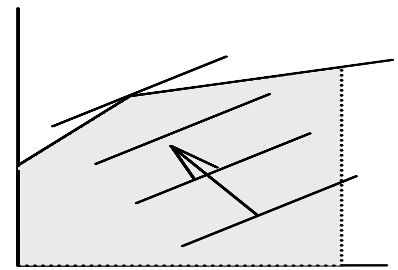
- 解：



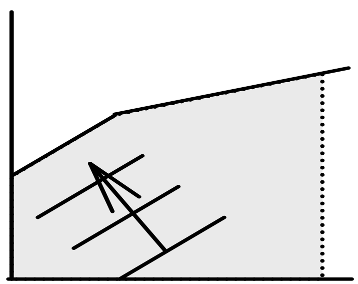
**(a)可行域有界 唯一最优解**



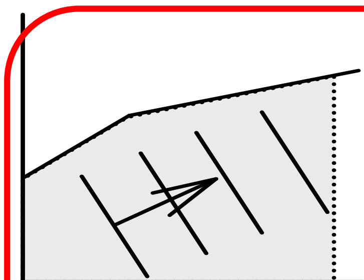
**(b)可行域有界 多个最优解**



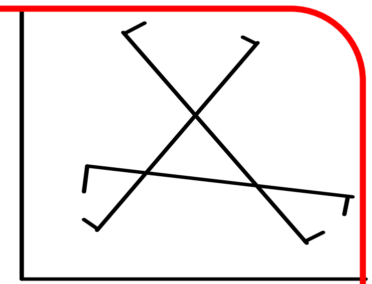
**(c)可行域无界 唯一最优解**



**(d)可行域无界 多个最优解**



**(e)可行域无界 目标函数无界**



**(f)可行域为空集 无可行解**

无最优解

# 课 堂 练 习

- 2、用图解法求解下面的线性规划问题：

$$
\begin{array}{llr}
\text{P: Max } z = 2x_1 + 3x_2 & & \\
\text{s.t.} \quad x_1 + 4x_2 \le 12 & & (I) \\
\quad 2x_1 - x_2 \ge -2 & & (II) \\
\quad 5x_1 + 3x_2 \le 15 & & (III) \\
\quad 4x_1 + 6x_2 \ge 6 & & (IV) \\
\quad x_1 \ge 0 & & (V) \\
\quad x_2 \ge 0 & & (VI)
\end{array}
$$

# 课堂练习

- 解：

The feasible set determined by the constraints of problem P, is shown as the shaded area in Fig. 2.4.

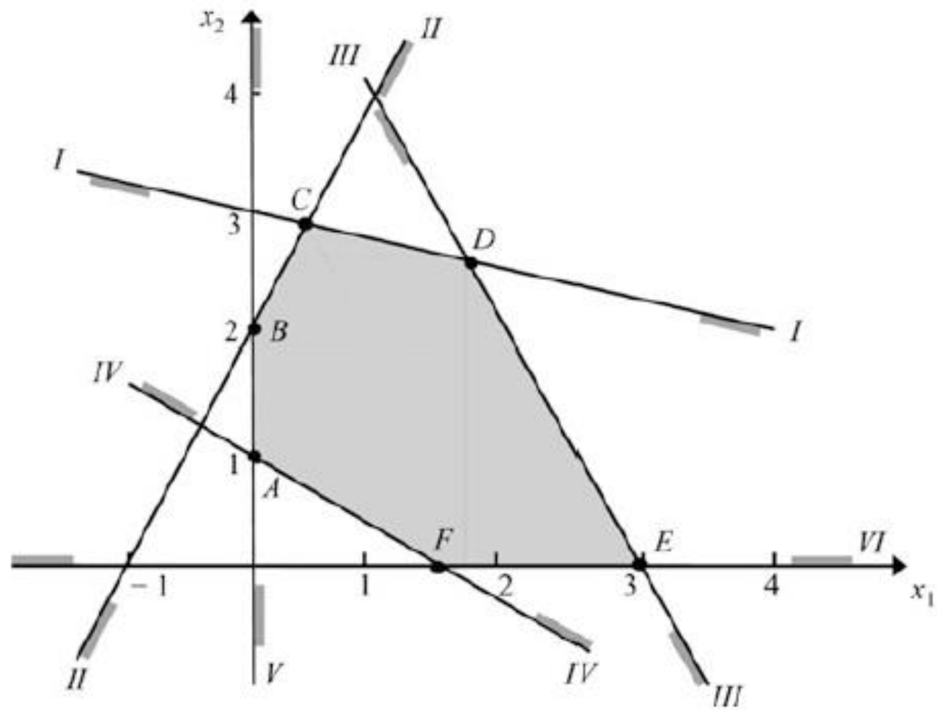



**Fig. 2.4** Feasible region

# 课堂练习

- 解（续）：

(1) 最优点是哪个（些）点？
(2) 若目标函数取最小化呢？
(3) 采用单纯形法，若以A点作为初始可行顶点，则该方法求解过程所得到的顶点序列是什么？

分析可知：
(1) D点为唯一最优点。
(2) 若目标函数取最小化，则A点、F点以及两点之间连线上的所有点都是最优点。
(3) 采用单纯形法，若以A点作为初始可行顶点，则该方法求解过程所得到的顶点序列A→B→C→D？

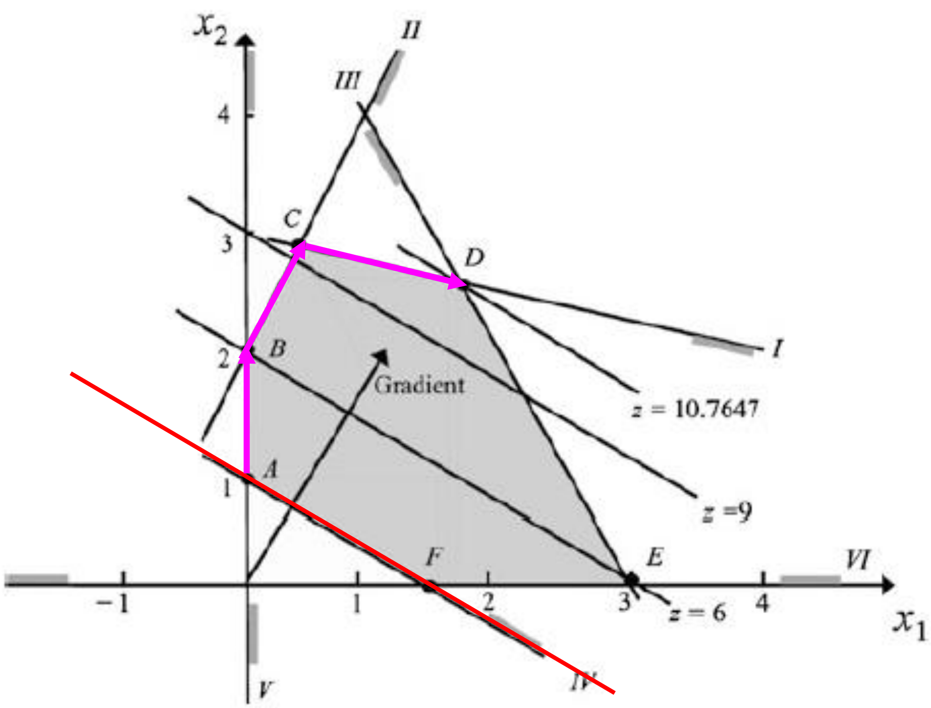



**Fig. 2.7** Finding an optimal point

# 谢 谢！

Thank you!