博弈论

第十二章

内容提要

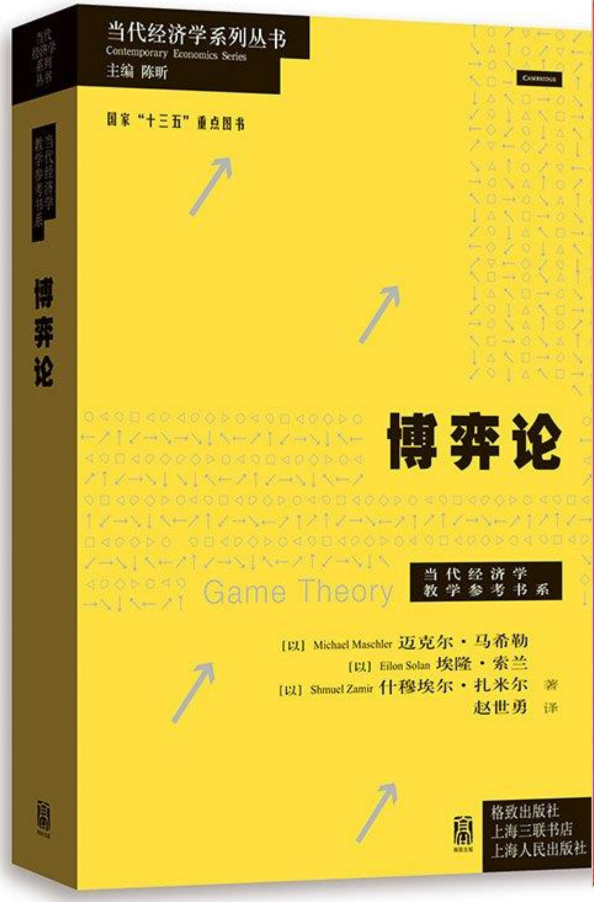
- 引言
- 完全信息静态博弈
- 完全信息动态博弈
- 不完全信息静态博弈
- 不完全信息动态博弈
- 冲突分析简介

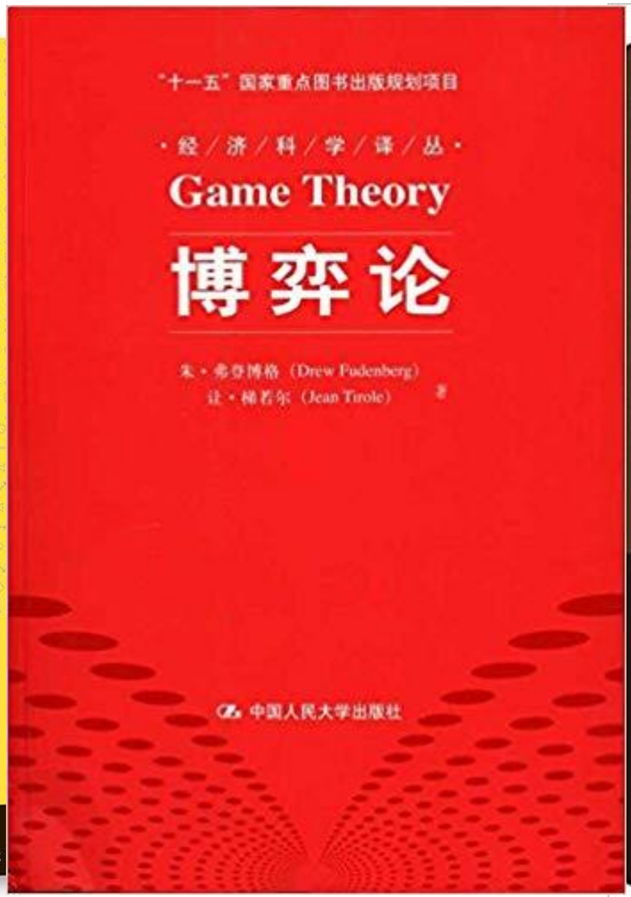
引 言

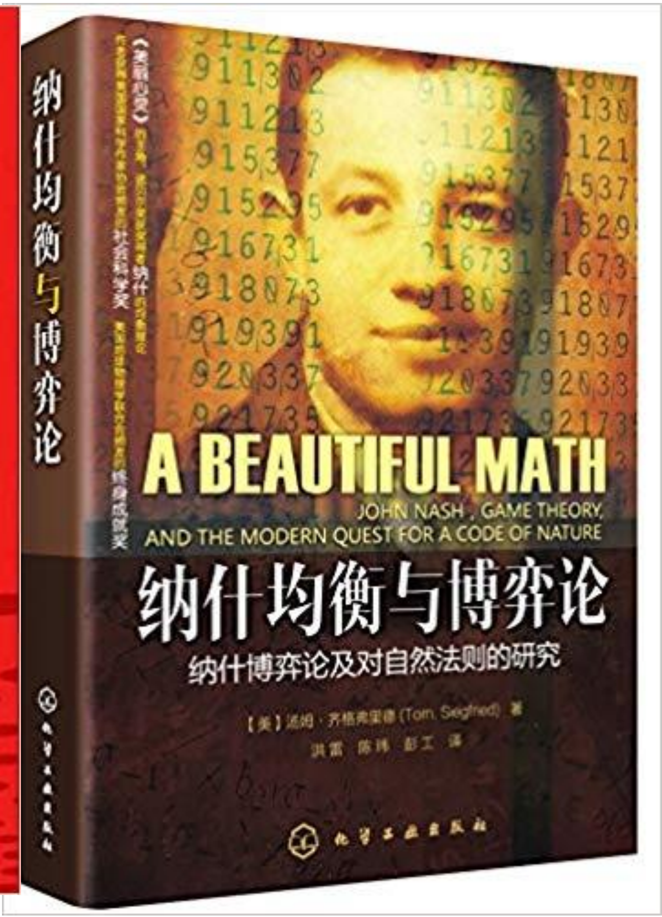
第1节

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

参考书







Haiyan Lu Jiangnan University

博弈论概述

- 博弈论是研究具有斗争或竞争性质现象的数学理论和方法。
  - 一般认为，它是现代数学的一个新分支，是运筹学的一个重要学科。由于博弈论研究的问题与政治、经济、军事活动乃至一般的日常生活等有着密切联系，因此日益引起广泛重视。
- 具有斗争或竞争性质的行为称为博弈行为(对策行为)。
  - 在这类行为中，为了达到各自的目标和利益，参与斗争或竞争的各方必须考虑对手的各种可能的行动方案（策略），并力图选取对自己最有利或最合理的方案（策略）。
  - 典型的博弈论例子：“齐王赛马”

博弈论发展历程

- 博弈(Game Theory)，又称对策，是自古以来政治家和军事家都很注意研究的问题。
  - 我国古代的《孙子兵法》不仅是一部军事著作，而且算是最早的一部博弈论专著。http://tv.cntv.cn/videoset/VSET100189932063
- 博弈论作为一门学科，是在20世纪40年代形成并发展起来的。
  - 1944年，von Neumann与Oskar Morgenstern合著的《Theory of Games and Economic Behavior》一书的出版，标志着现代博弈论的初步形成。
- 20世纪50年代，Nash建立了非合作博弈的“Nash Equilibrium”理论，标志着博弈论的新时代开始。
  - Nash的故事被好莱坞排成了电影《美丽心灵》，该片获得了2002年奥斯卡四项大奖。
  - 1994年，三位博弈论专家即数学家Nash、经济学家Harsanyi和Selten因在博弈论及其在经济学中的应用研究上所作出的巨大贡献而获得诺贝尔经济学奖。

博弈行为的三个基本要素

- 局中人(players)
  - 指参与竞争或对抗的各方，即在一局博弈中，有权决定自己行动方案的对策参加者。
    - 局中人可以是人，也可以是集团；可以有两方，也可以有多方。
- 策略(stratgies)集
  - 指局中人所拥有的对付其他局中人的行动方案（策略）的集合。每个局中人都有自己的策略集。
    - 在一局博弈中，各局中人选定的策略形成的策略组合称为一个局势。
- 收益函数(payoff function)
  - 指一局博弈后各局中人的输赢得失，用$u(u_1, \dots, u_n)$表示，其中u_i为局中人i的收益。

博弈行为的三个基本要素

- 备注
  - 实际上，博弈论要研究问题需要考虑六个要素。除了上述三个基本要素之外，另外三个要素是：
    - 信息
      - 完全信息（complete information）
        - 对所有局中人的策略和支付函数的完全了解。
      - 不完全信息（incomplete information）
      - 完美信息（perfect information）
        - 对所有局中人已有行动的完全把握。
      - 不完美信息（imperfect information）
    - 行动顺序
    - 外部环境
      - 外部环境是客观存在，不是人的主观决策，但是博弈论考虑很多问题时经常会讨论外部环境。

博弈论的假设

- 博弈论的研究是建立在下述假设前提下的：
  - 参与博弈的各局中人都是“**理性的**”。
    - **理性人**是指有一个明确定义的偏好，在面临给定的约束条件下最大化自己的偏好。
    - 博弈中一个**理性的决策**必定建立在预测其他局中人的反应之上。一个局中人将自己置身于其他局中人的位置，预测他们将选择的行为，在这个基础上该局中人决定自己最理想的行动。

博弈模型的分类

- 按照博弈信息
  - 完全信息博弈、不完全信息博弈
- 按照行动次序（或时间）
  - 静态博弈、动态博弈
- 按照合作与否
  - 非合作博弈、合作博弈
- 按照局中人个数
  - 二人博弈、多人博弈
- 按照收益是否零和
  - 零和博弈、非零和博弈
- 按照策略个数
  - 有限博弈、无限博弈
- 按照数学特征
  - 矩阵博弈、连续博弈、微分博弈、阵地博弈、凸博弈、随机博弈…

博弈问题的解及相关概念

- 非合作博弈的解
  - 均衡
- 合作博弈的解
  - 核心、夏普利值，等
- 微分博弈的解
  - 除了上面出现的解的概念之外，因其讨论的一个角度是最优控制，因此有时解也称为控制。

博弈问题的解及相关概念

- 备注：
  - 决策理论曾经分为四个分支：
    - 最优化：一个个体在各种条件确定的状态下进行决策
    - 不确定型决策
    - 风险型决策
    - 冲突型决策（博弈论）
  - 博弈论过去也称对策论。对策论有三个要素：局中人、策略集、收益函数。在完全信息静态博弈中只需要考虑这三个要素，因此，过去的对策论主要讨论的是完全信息静态博弈。

完 全 信 息 静 态 博 弈

第2节

矩阵博弈

- 矩阵博弈是完全信息静态博弈中最简单的一种。
- 矩阵博弈的数学模型
  - 局中人
    - 有A和B两个局中人。
  - 策略集
    - 局中人A的策略集为$\{a_1, \ldots, a_m\}$，局中人B的策略集为$\{b_1, \ldots, b_n\}$。
  - 收益函数
    - 在局中人A采取策略a_i、局中人B采取策略b_j时形成的**（纯）局势**下(a_i, b_j)下，两局中人各自的收益为c_{ij}^a和c_{ij}^b。
- 备注
  - **完全信息**是指所有局中人对其他局中人各自的策略以及不同局势下的收益函数都有完全充分的了解。
  - **静态**是指两局中人同时采取行动（互相保密），或虽不同时行动但后行动者对前者采取的策略并不知晓。

矩阵博弈

- 矩阵博弈的收益函数可用双元矩阵$[(c_{ij}^a, c_{ij}^b)]_{m\times n}$表示:

A的策略	B的策略			
	b_1	b_2	$\cdots$	b_n
a_1	(c_{11}^a, c_{11}^b)	(c_{12}^a, c_{12}^b)	$\cdots$	(c_{1n}^a, c_{1n}^b)
a_2	(c_{21}^a, c_{21}^b)	(c_{22}^a, c_{22}^b)	$\cdots$	(c_{2n}^a, c_{2n}^b)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_m	(c_{m1}^a, c_{m1}^b)	(c_{m2}^a, c_{m2}^b)	$\cdots$	(c_{mn}^a, c_{mn}^b)

博弈模型的表达形式

- 博弈模型有**策略式**（也称为标准式、正则式）和**扩展式**两种表达形式。
  - 策略式博弈有时也称为矩阵博弈。
- 举例说明：
  - **例1** 囚徒困境问题(The Prisoner’s Dilemma)

    设有甲、乙两名嫌疑犯因同一桩罪行被捕，由于**希望他们坦白并提供对方的犯罪证据**，规定：

    - 若两人均坦白，各判刑3年；
    - 若一方坦白，另一方不坦白，坦白一方从轻释放，不坦白一方判8年；
    - 若两人均不坦白，由于犯罪事实证据中很多不能成立，只能每人各判1年。

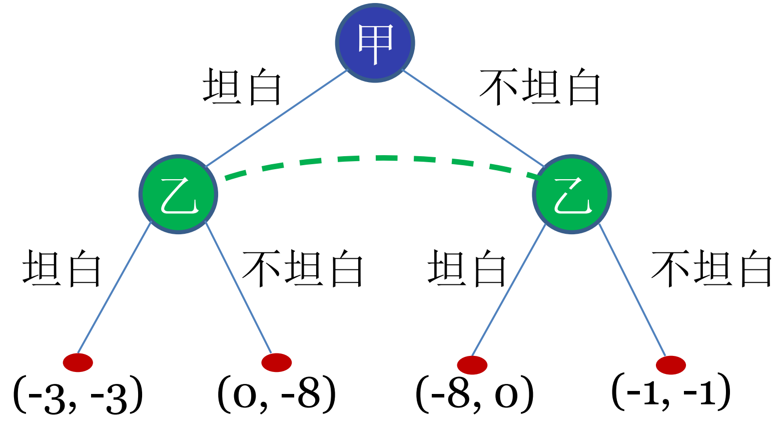
    试分别写出其策略式和扩展式的表达式。

博弈模型的表达形式

- (例1)解：
  - 策略式，即写出收益函数的**双元矩阵**。

甲	乙	
	坦白	不坦白
坦白	(-3, -3)	(0, -8)
不坦白	(-8, 0)	(-1, -1)

  - 扩展式，即画出**博弈树**，描述所有局中人的行动顺序、采取的策略以及采取策略时拥有的信息以及相应的收益。（图中乙的两个决策点之间用**虚线**相连，表明两个决策点属于同一信息集，即在这两个点上乙所掌握的在该点之前的博弈信息是完全一样的，乙不知道甲的策略是坦白还是不坦白。）



Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

Example: The Prisoner's Dilemma

The Prisoner's Dilemma is perhaps the best-known example in game theory, and it often serves as a parable for many different applications in economics and political science. It is a static game of complete information that represents a situation consisting of two individuals (the players) who are suspects in a serious crime, say, armed robbery. The police have evidence of only petty theft, and to nail the suspects for the armed robbery they need testimony from at least one of the suspects.

The police decide to be clever, separating the two suspects at the police station and questioning each in a different room. Each suspect is offered a deal that reduces the sentence he will get if he confesses, or "finks" (F), on his partner in crime. The alternative is for the suspect to say nothing to the investigators, or remain "mum" (M), so that they do not get the incriminating testimony from him. (As the Mafia would put it, the suspect follows the "omertà"—the code of silence.)

The payoff of each suspect is determined as follows: If both choose mum, then both get 2 years in prison because the evidence can support only the charge of petty theft. If, say, player 1 mums while player 2 finks, then player 1 gets 5 years in prison while player 2 gets only 1 year in prison for being the sole cooperator. The reverse outcome occurs if player 1 finks while player 2 mums. Finally, if both fink then both get only 4 years in prison. (There is some reduction of the 5-year sentence because each would blame the other for being the mastermind behind the robbery.)

		Player 2	
		M	F
Player 1	M	$-2, -2$	$-5, -1$
	F	$-1, -5$	$-4, -4$

Being a thoughtful and rational adviser, you make the following observation for player 1: "If player 2 chooses F, then playing F gives you -4, while playing M gives you -5, so F is better." Player 1 will then bark at you, "My buddy will never squeal on me!" You, however, being a loyal adviser, must coolly reply as follows: "If you're right, and player 2 chooses M, then playing F gives you -1, while playing M gives you -2, so F is still better. In fact, it seems like F is always better!"

Indeed if I were player 2's lawyer, then the same analysis would work for him, and this is the "dilemma": each player is better off playing F regardless of his opponent's actions, but this leads the players to receive payoffs of -4 each, while if they could only agree to both choose M, then they would obtain -2 each. Left to their own devices, and to the advocacy of their lawyers, the players should not be able to resist the temptation to choose F. Even if player 1 believes that player 2 will play M, he is better off choosing F (and vice versa).

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

Example: Rock-Paper-Scissors

Consider the famous child's game rock-paper-scissors. Recall that rock (R) beats scissors (S), scissors beats paper (P), and paper beats rock. Let the winner's payoff be 1 and the loser's be -1, and let the payoff for each player from a tie (i.e., they both choose the same action) be 0. This is a game with two players, $N = \{1, 2\}$, and three strategies for each player, $S_i = \{R, P, S\}$. Given the payoffs already described, we can write the matrix representation of this game as follows:

		Player 2 R	Player 2 P	Player 2 S
Player 1	R	0, 0	−1, 1	1, −1
Player 1	P	1, −1	0, 0	−1, 1
Player 1	S	−1, 1	1, −1	0, 0

Remark Such a matrix is sometimes referred to as a *bi-matrix*. In a traditional matrix, by definition, each entry corresponding to a row-column combination must be a single number, or element, while here each entry has a vector of two elements—the payoffs for each of the two players. Thus we formally have *two matrices*, one for each player. We will nonetheless adopt the common abuse of terminology and call this a matrix.

博弈模型的表达形式

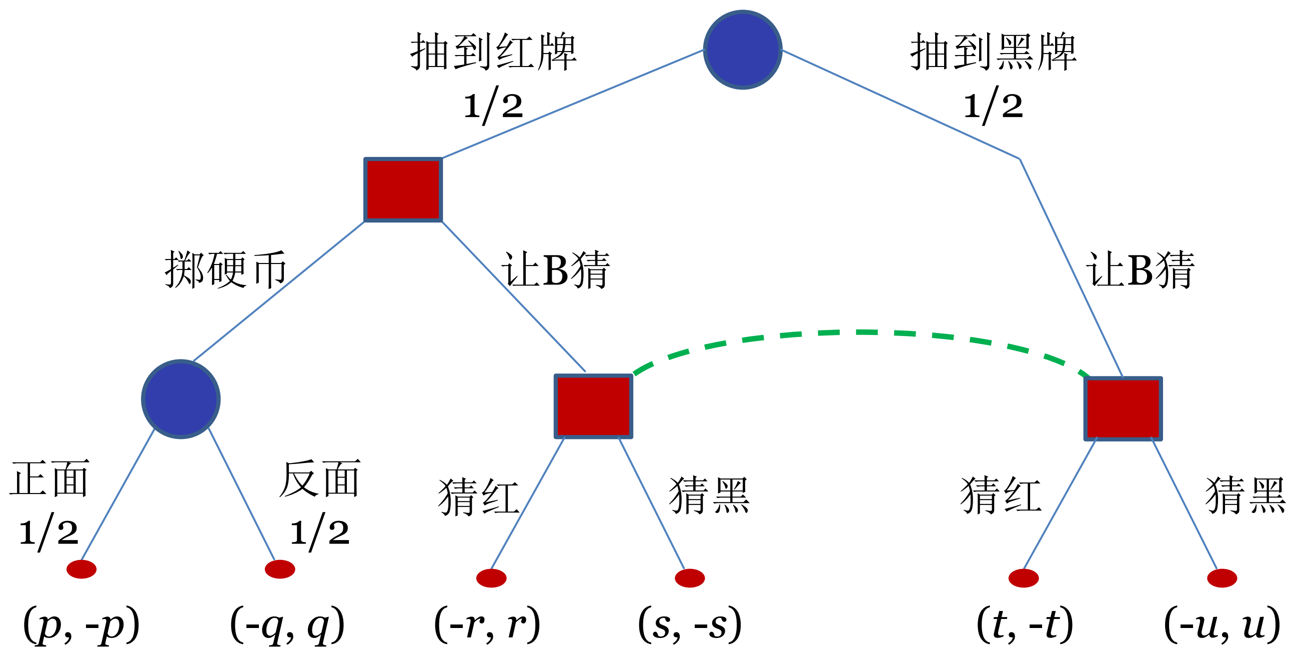
- 例2 从一张红牌和一张黑牌中随机出抽取一张，在对B保密情况下拿给A看。
  - 若A看到的是红牌，他可选择或掷硬币决定胜负，或让B猜。若选择掷硬币，当出现正面，A赢p元，出现反面，输q元；若让B猜，当B猜中是红牌，A输r元，反之B猜是黑牌，A赢s元。
  - 若A看到的是黑牌，他只能让B猜。当B猜中是黑牌，A输u元，反之B猜是红牌，A赢t元。

  试确定A、B各自的策略，建立该博弈的策略式和扩展式模型。

- 解：
  - 因A的赢得和损失分别是B的损失和赢得，因此本例属二人零和博弈。
  - 由于本例博弈模型的策略表达式难以直接写出，故可先写出其扩展式。见下页的博弈树。

博弈模型的表达形式

- (例2)解（续）：
  - 本例模型的**扩展式**见下图，该图中○为随机点，□为决策点。



Haiyan Lu Jiangnan University

博弈模型的表达形式

- (例2)解（续）：
  - 由本例博弈模型的扩展式（博弈树），可归纳出各种情况下局中人A与B各自的收益值，见下表（A的策略有掷硬币和让B猜两种，B的策略有猜红和猜黑两种）：
  -

A	B					
	抽到红牌(½)				抽到黑牌(½)	
	正面(½)		反面(½)		猜红	猜黑
	猜红	猜黑	猜红	猜黑		
掷硬币	$(p, -p)$	$(p, -p)$	$(-q, q)$	$(-q, q)$	$(t, -t)$	$(-u, u)$
让B猜	$(-r, r)$	$(s, -s)$	$(-r, r)$	$(s, -s)$	$(t, -t)$	$(-u, u)$

可以跳过此表，直接写出下面的**策略式博弈**

博弈模型的表达形式

- (例2)解（续）：
  - 由上表中的数据，计算各种局势下A、B的收益期望值，从而得到本例的收益矩阵，即标准式（策略式），见下表：

A	B	
	猜红	猜黑
掷硬币	$\left(\frac{1}{4}(p-q+2t),-\frac{1}{4}(p-q+2t)\right)$	$\left(\frac{1}{4}(p-q-2u),-\frac{1}{4}(p-q-2u)\right)$
让B猜	$\left(\frac{1}{2}(-r+t),-\frac{1}{2}(-r+t)\right)$	$\left(\frac{1}{2}(s-u),-\frac{1}{2}(s-u)\right)$

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

博弈模型的表达形式

- 备注
  - 博弈模型的策略式和扩展式**可以相互转化**，具体模型中采用何种表达式，应看哪一种更方便来定。
  - 博弈树中每个决策点都对应相应的信息集，它表明决策者掌握的在该决策点之前的信息及该点在决策中所处的层次。
  - 一个信息集可以含一个决策点，也可以含多个决策点，前者称为单点信息集，后者称为多点信息集。
  - 两个以上决策点属于同一信息集的条件：
    - (1) 这些决策点属于同一决策层次
    - (2) 进行决策前的信息相同。

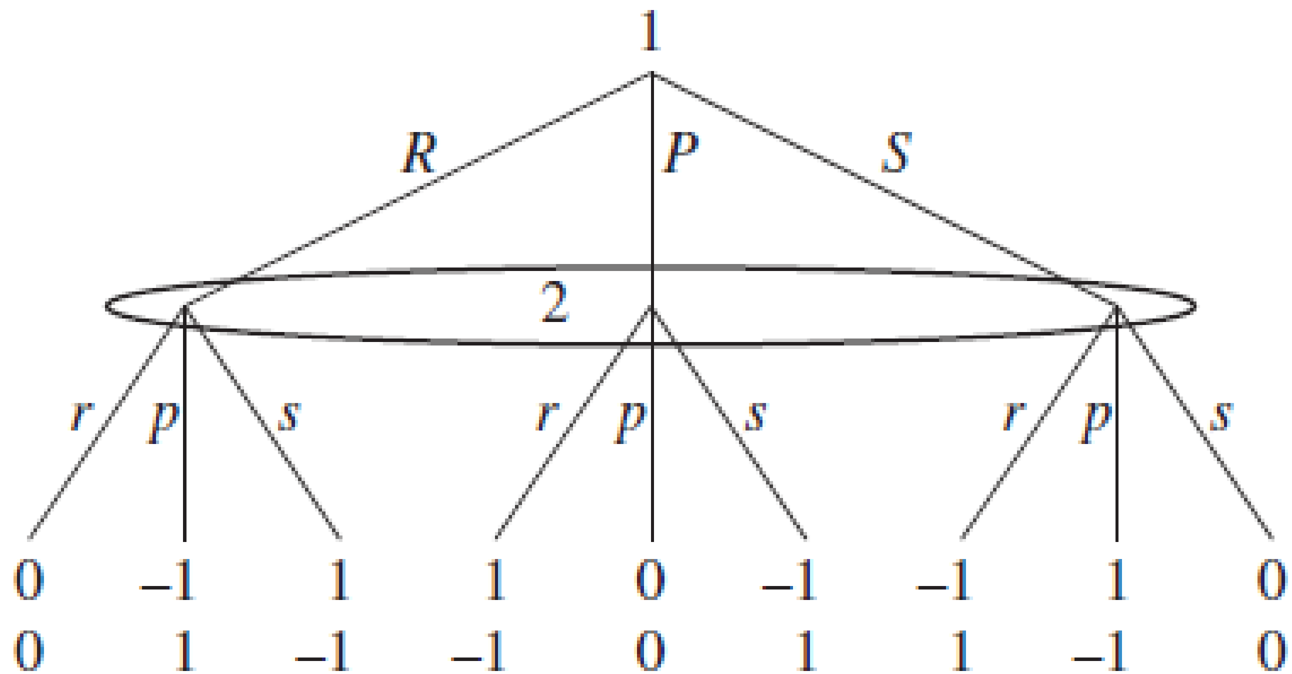
Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

课堂练习

- 1、画出“Rock, Paper, Scissors”博弈的扩展式（即：博弈树）
- 2、写出“田忌赛马”的博弈的策略式。

课堂练习

- 1、 “Rock, Paper, Scissors”的扩展式博弈（即：博弈树）如下



Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

课堂练习

- 2、 “田忌赛马”的博弈的策略式可用下表表示：

齐王的策略	田忌的策略					
	b_1 (上,中,下)	b_2 (上,下,中)	b_3 (中,上,下)	b_4 (中,下,上)	b_5 (下,中,上)	b_6 (下,上,中)
a_1(上,中,下)	3	1	1	1	1	-1
a_2(上,下,中)	1	3	1	1	-1	1
a_3(中,上,下)	1	-1	3	1	1	1
a_4(中,下,上)	-1	1	1	3	1	1
a_5(下,中,上)	1	1	-1	1	3	1
a_6(下,上,中)	1	1	1	-1	1	3

齐王的赢得

Haiyan Lu　6/10/2020
Jiangnan University

纳什均衡

甲	乙	
	坦白	不坦白
坦白	(-3, -3)	(0, -8)
不坦白	(-8, 0)	(-1, -1)

- 概述
  - 经济学中的均衡理论
    - 当一个系统处于**平衡状态**时，系统中的各参与方都不会主动采取行动偏离这个状态，因为当其他人不采取行动时，谁采取任何偏离平衡状态的行动只会给自己带来损失。
  - 博弈论中的纳什均衡
    - **纳什均衡**是博弈论中最重要的概念，或可以说博弈论就是建立在纳什均衡理论的基础上。
      - 在矩阵博弈中，双方局中人寻求的最优解是一种**均衡解**，达到这种均衡时，只要其他局中人不改变自己的策略，则任何一方单独改变自己的策略只能带来收益或效用的减少。
      - **纳什均衡**是一种策略组合，其中每个局中人的策略是对其他局中人策略的最优反应（最佳应对）。
        - 在囚徒困境问题中，两名囚徒采取的**(坦白，坦白)**策略就是**纳什均衡解**。

纳什均衡

- 定义
  - 博弈的标准式
    - 在有n个局中人的博弈中，设各局中人的策略空间分别为$S_1, \dots, S_n$，用$(s_1, \dots, s_n)$表示每个局中人选定某一策略时形成的局势，这里$s_i \in S_i, i = 1, \dots, n$。令$u_i(s_1, \dots, s_n)$表示相应于该局势的第$i$个局中人的收益函数(可简写为$u_i$)，则称$G\{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$为博弈的**标准式**，也称为**策略式**。
  - 严格劣策略
    - 设$s_i' \in S_i$，$s_i'' \in S_i$，若对于分别与其他局中人所有可能的策略组成的局势，均有

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \dots, s_n)$$

则称s_i'是对s_i''的严格劣策略。

思考：前述的“囚徒困境”博弈中有无**严格劣策略？**

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

弱劣策略

Strategy *B weakly dominates* strategy *T* (and strategy *T* is *weakly dominated* by strategy *B*).

		Player II	
		L	R
Player I	T	$1, 2$	$2, 3$
	B	$2, 2$	$2, 0$

Figure 4.17 A game with no strictly dominated strategies

Definition 4.12 *Strategy s_i of player i is termed* weakly dominated *if there exists another strategy t_i of player i satisfying the following two conditions:*

(a) For every strategy vector $s_{-i} \in S_{-i}$ of the other players,

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(t_i, s_{-i}). \tag{4.8}$$

(b) There exists a strategy vector $t_{-i} \in S_{-i}$ of the other players such that

$$u_i(s_i, t_{-i}) < u_i(t_i, t_{-i}). \tag{4.9}$$

In this case we say that strategy s_i is weakly dominated *by strategy t_i, and that strategy t_i* weakly dominates *strategy s_i.*

严格占优意味着弱占优。
除非特别写明“严格占优”，否则后面的讨论用“占优”表示“弱占优”

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

纳什均衡

- 备注
  - 假定：局中人不会选择劣策略。
  - 重复剔除严格劣策略的结果（即剔除过程结束后剩下的策略集）不依赖于剔除策略的顺序；但重复剔除弱劣策略可能会影响剔除的结果。
    - 严格劣策略的剔除对博弈的均衡集没有影响。重复剔除弱劣策略可能会减少均衡集，但不会产生新的均衡。
      - 实际上，重复剔除弱劣策略可能会剔除掉原来博弈的全部均衡。

纳什均衡

- 定义
  - 纳什均衡
    - 在有n个局中人的标准式博弈$G\{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$中，若局势$(s_1^*, \dots, s_n^*)$满足：对每一个局中人$i$，$s_i^*$是该局中人针对其他$n-1$个局中人所选策略$\{s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*\}$的**最佳应对策略**，则称局势$(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$是该博弈的一个（纯策略意义下的）**纳什均衡**。

即：$\forall s_i \in S_i$，有

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

或：s_i^*是以下优化问题的最优解

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

注意：纯策略意义下的纳什均衡不一定存在。

纳什均衡

- 备注
  - 纳什证明了在任何**非合作有限博弈**（局中人数量及每个局中人的策略空间均为有限）中，都存在至少一个混合策略意义下的纳什均衡。
  - 纳什均衡所体现的最重要特征是稳定性：在纳什均衡下，每个局中人针对其他局中人的行为，选择对自己最有利的行动。
  - 社会行为规范可被视为纳什均衡。
    - 如果一个行为规范不是均衡，那么社会中的有些人将发现，偏离行为规范对自己有利，从而规范也就不成其为规范了。
  - 尽管纳什均衡的概念有很多优点，但在策略式或扩展式博弈的研究中，它既不是一切，也不是终结。
    - 一些博弈不存在纳什均衡或存在多个纳什均衡，即使博弈存在唯一的纳什均衡，它也未必总是可以描述理性局中人的预期行为。
    - 非合作有限博弈纳什均衡解的计算问题还远没有解决。

Theorem 5.10 **(Nash [1950b, 1951])** *Every game in strategic form G, with a finite number of players and in which every player has a finite number of pure strategies, has an equilibrium in mixed strategies.*

The proof of Nash's Theorem will be presented later in this chapter. As a corollary, along with Theorem 4.45 on page 115, we have an analogous theorem for two-player zero-sum games. This special case was proven by von Neumann twenty-two years before Nash proved his theorem on the existence of the equilibrium that bears his name.

Theorem 5.11 **(von Neumann's Minmax Theorem [1928])** *Every two-player zero-sum game in which every player has a finite number of pure strategies has a value in mixed strategies.*

In other words, in every two-player zero-sum game the minmax value in mixed strategies is equal to the maxmin value in mixed strategies. Nash regarded his result as a generalization of the Minmax Theorem to n players. This is, in fact, a generalization of the Minmax Theorem here to two-player games that may not be zero-sum, and to games with any finite number of players. On the other hand, as we noted on page 117, this is a generalization of only one aspect of the notion of the "value" of a game, namely, the aspect of stability. The other aspect of the value of a game – the security level – which characterizes the value in two-player zero-sum games, is not generalized by the Nash equilibrium.

Player II

Player I		L	M	R
	T	1, 0	1, 2	0, 1
	B	0, 3	0, 1	2, 0

Figure 4.12 Strategy M dominates strategy R

Player II

Player I		L	M
	T	1, 0	1, 2
	~~B~~	~~0, 3~~	~~0, 1~~

Figure 4.13 The game in Figure 4.12 after the elimination of strategy R

		Player II	
		L	M
Player I	T	1, 0	1, 2

Figure 4.14 The game in Figure 4.12 following the elimination of strategies R and B

Because in this game strategy L is strictly dominated (for Player II) by strategy M, after its elimination only one result remains, (1, 2), which obtains when Player I plays T and Player II plays M.

The process we have just described is called *iterated elimination of strictly dominated strategies*. When this process yields a single strategy vector (one strategy per player), as in the example above, then, under Assumptions 4.7, 4.8, and 4.10, that is the strategy vector that will obtain, and it may be regarded as the *solution* of the game.

A special case in which such a solution is guaranteed to exist is the family of games in which every player has a strategy that strictly dominates all of his other strategies, that is, a *strictly dominant strategy*. Clearly, in that case, the elimination of all strictly dominated strategies leaves each player with only one strategy: his strictly dominant strategy. When this occurs we say that the game has a solution in *strictly dominant strategies*.

There are games in which iterated elimination of strictly dominated strategies does not yield a single strategy vector. For example, in a game that has no strictly dominated strategies, the process fails to eliminate any strategy. The game in Figure 4.17 provides an example of such a game.

		Player II	
		L	~~R~~
Player I	~~T~~	~~1, 2~~	~~2, 3~~
	B	2, 2	~~2, 0~~

Figure 4.17 A game with no strictly dominated strategies

Although there are no strictly dominated strategies in this game, strategy B does have a special attribute: although it does not always guarantee a higher payoff to Player I relative to strategy T, in all cases it does grant him a payoff at least as high, and in the special case in which Player II chooses strategy L, B is a strictly better choice than T. In this case we say that strategy B *weakly dominates* strategy T (and strategy T is *weakly dominated* by strategy B).

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

If strategy t_i dominates (weakly or strictly) strategy s_i, then s_i does not (weakly or strictly) dominate t_i. Clearly, strict domination implies weak domination. Because we will refer henceforth almost exclusively to weak domination, we use the term "domination" to mean "weak domination," unless the term "strict domination" is explicitly used. The following rationality assumption is stronger than Assumption 4.7.

Assumption 4.13 *A rational player does not use a dominated strategy.*

Under Assumptions 4.8, 4.10, and 4.13 we may eliminate strategy T in the game in Figure 4.17 (as it is weakly dominated), and then proceed to eliminate strategy R (which is strictly dominated after the elimination of T). The only remaining strategy vector is (B, L), with a payoff of $(2, 2)$. Such a strategy vector is called *rational*, and the process of iterative elimination of weakly dominated strategies is called *rationalizability*. The meaning of "rationalizability" is that a player who expects a certain strategy vector to obtain can explain to himself why that strategy vector will be reached, based on the assumption of rationality.

Definition 4.14 *A strategy vector $s \in S$ is termed* rational *if it is the unique result of a process of iterative elimination of weakly dominated strategies.*

As we have argued, when only strictly dominated strategies are involved in a process of iterated elimination, the result is independent of the order in which strategies are eliminated. In iterated elimination of weakly dominated strategies, the result may be sensitive to the order of elimination. This phenomenon occurs for example in the following game.

Example 4.16 Consider the strategic-form game that appears in Figure 4.21.

Player II

Player I		L	C	R
	T	1, 2	2, 3	0, 3
	M	2, 2	2, 1	3, 2
	B	2, 1	0, 0	1, 0

Figure 4.21 A game in which the order of the elimination of dominated strategies influences the yielded result

In the table below, we present three strategy elimination procedures, each leading to a different result (verify!).

	Order of elimination from left to right	Result	Payoff
(1)	T, R, B, C	ML	2, 2
(2)	B, L, C, T	MR	3, 2
(3)	T, C, R	ML or BL	2, 2 or 2, 1

The last line shows that eliminating strategies in the order T, C, R leaves two results ML and BL, with no possibility for further elimination because Player I is indifferent between the two results. This means that the order of elimination may determine not only the yielded strategy vector, but also whether or not the process yields a single strategy vector. ◀

Dominance is a very important concept in game theory. As we saw in the previous section, it has several limitations, and it is insufficient for predicting a rational result in every game.

		Player II		
		L	C	R
	T	0, 6	6, 0	4, 3
Player I	M	6, 0	0, 6	4, 3
	B	3, 3	3, 3	5, 5

Figure 4.22 A two-player game with no dominated strategies

- If Player II knows that Player I will choose T, he will choose L (his best reply to T).
- If Player I knows that Player II will choose L, he will choose M (his best reply to L).
- If Player II knows that Player I will choose M, he will choose C (his best reply to M).
- If Player I knows that Player II will choose C, he will choose T (his best reply to C).
- If Player II knows that Player I will choose B, he will choose R (his best reply to B).
- If Player I knows that Player II will choose R, he will choose B (his best reply to R).

The pair of strategies (B, R) satisfies a stability property: each strategy in this pair is the best reply to the other strategy. Alternatively, we can state this property in the following way: assuming the players choose (B, R), neither player has a *profitable deviation*; that is, under the assumption that the other player indeed chooses his strategy according to (B, R), neither player has a strategy that grants a higher payoff than sticking to (B, R). This stability property was defined by John Nash, who invented the equilibrium concept that bears his name.

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

Example 4.20 **Coordination game** The game presented in Figure 4.24 is an example of a broad class of games called "coordination games." In a coordination game, it is in the interests of both players to coordinate their strategies. In this example both (A, a) and (B, b) are equilibrium points. The equilibrium payoff associated with (A, a) is $(1, 1)$, and the equilibrium payoff of (B, b) is $(3, 3)$. In both cases, and for both players, the payoff is better than $(0, 0)$, which is the payoff for "miscoordinated" strategies (A, b) or (B, a).

Player II

Player I		a	b
	A	1, 1	0, 0
	B	0, 0	3, 3

Figure 4.24 A coordination game

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

Example 4.21 **Battle of the Sexes** The game in Figure 4.25 is called the "Battle of the Sexes."

		Woman	
		F	C
Man	F	2, 1	0, 0
	C	0, 0	1, 2

Figure 4.25 Battle of the Sexes

The name of the game is derived from the following description. A couple is trying to plan what they will be doing on the weekend. The alternatives are going to a concert (C) or watching a football match (F). The man prefers football and the woman prefers the concert, but both prefer being together to being alone, even if that means agreeing to the less-preferred recreational pastime.

There are two equilibrium points: (F, F) with a payoff of (2, 1) and (C, C) with a payoff of (1, 2). The woman would prefer the strategy pair (C, C) while the man would rather see (F, F) chosen. However, either one is an equilibrium. ◀

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

Example 4.22 **The Security Dilemma** The game illustrated in Figure 4.26 is also a coordination game called the "Security Dilemma." The game describes the situation involving the Union of Soviet Socialist Republics (USSR, Player 1) and the United States (US, Player 2) after the Second World War. Each of these countries had the capacity to produce nuclear weapons. The best outcome for each country (4 utility units in the figure) was the one in which neither country had nuclear weapons, because producing nuclear weapons is expensive and possession of such weapons is liable to lead to war with severe consequences. A less desirable outcome for each country (3 utility units in the figure) is for it to have nuclear weapons while the other country lacks nuclear weapons. Even less desirable for each country (2 utility units in the figure) is for both countries to have nuclear weapons. The worst outcome for a country (1 utility unit in the figure) is for it to lack nuclear weapons while the other country has nuclear weapons.

		US	
		Don't produce nuclear weapons	Produce nuclear weapons
USSR	Produce nuclear weapons	3, 1	2, 2
	Don't produce nuclear weapons	4, 4	1, 3

Figure 4.26 The Security Dilemma

有两个纳什均衡

Haiyan Lu
Jiangnan University

更理想的均衡
也更危险!

There are two Nash equilibria in this game: in one equilibrium neither country produces nuclear weapons and in the other equilibrium both countries produce nuclear weapons. If the US believes that the USSR is not going to produce nuclear weapons then it has no reason to produce nuclear weapons, while if the US believes that the USSR is going to produce nuclear weapons then it would be better off producing nuclear weapons. In the first equilibrium each country runs the risk that the other country will produce nuclear weapons, but in the second equilibrium there is no such risk: if the US does produce nuclear weapons then if the USSR also produces nuclear weapons then the US has implemented the best strategy under the circumstances, while if the USSR does not produce nuclear weapons then the outcome for the US has improved from 2 to 3. In other words, the more desirable equilibrium for both players is also the more risky one. This is why this game got the name the Security Dilemma. Some have claimed that the equilibrium under which both countries produce nuclear weapons is the more reasonable equilibrium (and that is in fact the equilibrium that has obtained historically). Note that the maxmin strategy of each country is to produce nuclear weapons; that strategy guarantees a country implementing it at least 2, while a country implementing the strategy of not producing nuclear weapons runs the risk of getting only 1. ◀

安全性：最大最小的概念

- 引例：考虑如下博弈
  - 该博弈有唯一但“**危险**”的均衡

局中人 I	局中人 II	
	L	R
T	(2, 1)	(2, −20)
M	(3, 0)	(−10, 1)
B	(−100, 2)	(3, 3)

  - 在一般的博弈中，局中人*i*能够为自己担保的收益是多少？
    - 在**“不依赖”于其他局中人理性**的前提下，甚至对他们的潜在行为做最悲观的估计，以保证自己最佳可能的收益。由此局中人 *i* 能够保证自己得到的收益值称为他的最大最小值(**maxmin value**)，有时也称作局中人*i* 的安全水平(**security level**)，保证实现这一值的策略称为相应局中人*i* 的**最大最小策略**。

Haiyan Lu
Jiangnan University

安全性：最大最小的概念

- 引例：考虑如下博弈
  - 计算每个局中人的安全值

局中人 I	局中人 II		min
	L	R	
T	$(2,1)$	$(2,-20)$	2
M	$(3,0)$	$(-10,1)$	-10
B	$(-100,2)$	$(3,3)$	-100
min	0	-20	$(2,0)$

- 局中人I的最大最小值是2，保证他得到这个值的策略是T；局中人II的最大最小值是0，保证他得到这个值的策略是L。若两个局中人都选择各自的**最大最小策略**，则结果是(T, L)，对应的收益是$(2,1)$，这里局中人II的收益是1，大于他的最大最小值0。

Haiyan Lu
Jiangnan University

安全性：最大最小的概念

As the next example illustrates, a player may have several maxmin strategies. In such a case, when the players use maxmin strategies the payoff depends on which strategies they have chosen.

Example 4.25 Consider the two-player game appearing in Figure 4.30.

		Player II L	Player II R	$\min_{s_{II} \in S_{II}} u_I(s_I, s_{II})$
Player I	T	3, 1	0, 4	0
Player I	B	2, 3	1, 1	1
$\min_{s_I \in S_I} u_{II}(s_I, s_{II})$		1	1	1, 1

Figure 4.30 A game with the maxmin values of the players

The maxmin value of Player I is 1 and his unique maxmin strategy is B. The maxmin value of Player II is 1, and both L and R are his maxmin strategies. It follows that when the two players implement maxmin strategies the payoff might be (2, 3), or (1, 1), depending on which maxmin strategy is implemented by Player II. ◀

安全性：最大最小的概念

- 备注
  - 局中人在纳什均衡中的收益**至少等于**他的最大最小值。
  - 剔除任何特定局中人的劣策略（严格劣策略或弱劣策略）不影响该局中人的最大最小值。
    - 剔除一个局中人的（严格或弱）劣策略可能会增加其他局中人的最大最小值（但不会降低其他局中人的最大最小值）。
    - 当计算局中人*i*的最大最小值时，我们可以剔除他的劣策略，但是一定不能剔除其他局中人的劣策略，因为这样做可能会增加局中人*i*的最大最小值。因此，**重复剔除（严格或弱）劣策略可能会增加某些局中人的最大最小值**。
  - 在**二人零和博弈**中，基于稳定性的均衡概念和基于安全性的最大最小概念是一回事，带来的是相同的结果。而在非零和博弈中，两个概念是不同的，对参与人的行为有不同的推测。

纳什均衡解的求取

- 用画线法求具有纯策略的纳什均衡解
  - 具体步骤
    - 对收益矩阵的每一列，在每一个收益向量的第一个分量的最大者下方画线；
    - 对收益矩阵的每一行，在每一个收益向量的第二个分量的最大者下方画线；
    - 两个分量下方都有画线的收益向量对应的策略组合是这个博弈的一个纳什均衡。

Haiyan Lu
Jiangnan University

也可以用剔除**严格劣策略**的方法求得该例的纳什均衡解

纳什均衡解的求取

- 用画线法求具有纯策略的纳什均衡解
  - **例3** 试用画线法求例1中囚徒困境问题的纳什均衡解。

甲	乙	
	坦白	不坦白
坦白	(-3, -3)	(0, -8)
不坦白	(-8, 0)	(-1, -1)

  - **解**:

由于纳什均衡中每个局中人的策略是对其他人策略的**最优反应**（**最佳应对**），因此在上表中甲、乙均采取坦白策略时的收益向量数字下均画了横线，其对应的（纯）局势**(坦白, 坦白)**即为**纳什均衡解**。

Haiyan Lu
Jiangnan University

纳什均衡解的求取

- 备注
  - “囚徒困境”的理论意义
    - 20世纪80年代以前的经济学，主要讨论完全竞争的市场经济，它建立在亚当·斯密的“看不见的手”的原理上，即每个人都从利己的角度出发，从不考虑对他人的影响，但最后却获得了全社会的最优。但“囚徒困境”和纳什均衡质疑了这个原理。
  - 当个人理性与集体理性不一致时，如果没有强制性的法律措施，则服从于集体理性的协议规则很难执行。
  - 纳什均衡虽然不一定是最有利的结局，但在其他各方策略不变时，任何一方单独改变策略只会对自己带来不利，因此建立在纳什均衡基础上的协议规则是博弈各方都能遵守的。

Haiyan Lu
Jiangnan University

纳什均衡解的求取

Example 4.38 Consider the two-player game appearing in Figure 4.32.

		Player II			
		L	C	R	$\min_{s_{II} \in S_{II}} u_I(s_I, s_{II})$
	T	3, −3	−5, 5	−2, 2	−5
Player I	M	1, −1	4, −4	1, −1	1
	B	6, −6	−3, 3	−5, 5	−5
$\min_{s_I \in S_I} u_{II}(s_I, s_{II})$		−6	−4	−1	1, −1

Figure 4.32 A two-player zero-sum game

In this example, $\underline{v}_I = 1$ and $\underline{v}_{II} = -1$. The maxmin strategy of Player I is M and that of Player II is R. The strategy pair (M, R) is also the equilibrium of this game (check!). In other words, here we have a case where the vector of maxmin strategies is also an equilibrium point: the two concepts lead to the same result. ◀

二人零和博弈

Let us now turn to the study of two-player zero-sum games. Since the payoffs u_{I} and u_{II} satisfy $u_{\mathrm{I}} + u_{\mathrm{II}} = 0$, we can confine our attention to one function, $u_{\mathrm{I}} = u$, with $u_{\mathrm{II}} = -u$. The function u will be termed the *payoff function* of the game, and it represents the payment that Player II makes to Player I. Note that this creates an artificial asymmetry (albeit only with respect to the symbols being used) between the two players: Player I, who is usually the row player, seeks to maximize $u(s)$ (his payoff) and Player II, who is usually the column player, is trying to minimize $u(s)$, which is what he is paying (since his payoff is $-u(s)$).

The game in Example 4.38 (page 110) can therefore be represented as shown in Figure 4.33.

The game of Matching Pennies (Example 3.20, page 52) can also be represented as a zero-sum game (see Figure 4.34).

Consider now the maxmin values of the players in a two-player zero-sum game. Player I's maxmin value is given by

$$\underline{v}_{\mathrm{I}} = \max_{s_{\mathrm{I}} \in S_{\mathrm{I}}} \min_{s_{\mathrm{II}} \in S_{\mathrm{II}}} u(s_{\mathrm{I}}, s_{\mathrm{II}}), \tag{4.49}$$

and Player II's maxmin value is

$$\underline{v}_{\mathrm{II}} = \max_{s_{\mathrm{II}} \in S_{\mathrm{II}}} \min_{s_{\mathrm{I}} \in S_{\mathrm{I}}} (-u(s_{\mathrm{I}}, s_{\mathrm{II}})) = - \min_{s_{\mathrm{II}} \in S_{\mathrm{II}}} \max_{s_{\mathrm{I}} \in S_{\mathrm{I}}} u(s_{\mathrm{I}}, s_{\mathrm{II}}). \tag{4.50}$$

Haiyan Lu
Jiangnan University

二人零和博弈

Denote

$$\underline{v} := \max_{s_{\mathrm{I}} \in S_{\mathrm{I}}} \min_{s_{\mathrm{II}} \in S_{\mathrm{II}}} u(s_{\mathrm{I}}, s_{\mathrm{II}}), \tag{4.51}$$

$$\overline{v} := \min_{s_{\mathrm{II}} \in S_{\mathrm{II}}} \max_{s_{\mathrm{I}} \in S_{\mathrm{I}}} u(s_{\mathrm{I}}, s_{\mathrm{II}}). \tag{4.52}$$

The value $\underline{v}$ is called the *maxmin value* of the game, and $\overline{v}$ is called the *minmax value*. Player I can guarantee that he will get at least $\underline{v}$, and Player II can guarantee that he will pay no more than $\overline{v}$. A strategy of Player I that guarantees $\underline{v}$ is termed a *maxmin strategy*. A strategy of Player II that guarantees $\overline{v}$ is called a *minmax strategy*.

We next calculate the maxmin value and minmax value in various examples of games. In Example 4.38, $\underline{v} = 1$ and $\overline{v} = 1$. In other words, Player I can guarantee that he will get a payoff of at least 1 (using the maxmin strategy M), while Player II can guarantee that he will pay at most 1 (by way of the minmax strategy R).

Haiyan Lu
Jiangnan University

二人零和博弈

		Player II		
		L	R	$\min_{s_{II} \in S_{II}} u_I(s_I, s_{II})$
Player I	T	-2	5	-2
	B	3	0	0
$\max_{s_I \in S_I} u_{II}(s_I, s_{II})$		3	5	$0, 3$

Figure 4.35 A game in strategic form with the maxmin and minmax values

Consider the game shown in Figure 4.35. In this figure we have indicated on the right of each row the minimal payoff that the corresponding strategy of Player I guarantees him. Beneath each column we have indicated the maximal amount that Player II will pay if he implements the corresponding strategy.

In this game $\underline{v} = 0$ but $\overline{v} = 3$. Player I cannot guarantee that he will get a payoff higher than 0 (which he can guarantee using his maxmin strategy B) and Player II cannot guarantee that he will pay less than 3 (which he can guarantee using his minmax strategy L).

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

二人零和博弈

		Player II		
		H	T	$\min_{s_{II} \in S_{II}} u_I(s_I, s_{II})$
Player I	H	1	−1	−1
	T	−1	1	−1
$\max_{s_I \in S_I} u_{II}(s_I, s_{II})$		1	1	−1, 1

Figure 4.36 Matching Pennies with the maxmin and minmax values

In this game, $\underline{v} = -1$ and $\overline{v} = 1$. Neither of the two players can guarantee a result that is better than the loss of one dollar (the strategies H and T of Player I are both maxmin strategies, and the strategies H and T of Player II are both minmax strategies).

As these examples indicate, the maxmin value $\underline{v}$ and the minmax value $\overline{v}$ may be unequal, but it is always the case that $\boxed{\underline{v} \leq \overline{v}.}$ The inequality is clear from the definitions of the maxmin and minmax: Player I can guarantee that he will get at least $\underline{v}$, while Player II can guarantee that he will not pay more than $\overline{v}$. As the game is a zero-sum game, the inequality $\underline{v} \leq \overline{v}$ must hold. A formal proof of this fact can of course also be given (Exercise 4.34).

Haiyan Lu
Jiangnan University

二人零和博弈

Definition 4.41 *A two-player game has a* value *if* $\underline{v} = \overline{v}$. *The quantity* $v := \underline{v} = \overline{v}$ *is then called the* value of the game.[6] *Any maxmin and minmax strategies of Player I and Player II respectively are then called* optimal strategies

Consider again the game shown in Figure 4.33. This game has a value equal to 1. Player I can guarantee that he will get at least 1 for himself by selecting the optimal strategy M, and Player II can guarantee that he will not pay more than 1 by choosing the optimal strategy R. Note that the strategy pair (M, R) is also a Nash equilibrium.

Player II

Player I		L	C	R
	T	3	–5	–2
Player I	M	1	4	1
	B	6	–3	–5

Figure 4.33 The payoff function u of the zero-sum game in Example 4.38

二人零和博弈

- **备注**
  - 需要注意的是，我们隐含地假定，策略型博弈是参与人同时选择行动的博弈，每个参与人在选择自己的策略时，并不知道对方选择的策略。但是，如果博弈有一个**值**，则每个参与人可以向对方展示自己意欲选择的最佳策略，而仍然可以保证自己的最大最小值。
    - 在“田忌赛马”博弈中，这样做合理吗？
  - 在二人零和博弈中，博弈的值和纳什均衡，虽然是两个不同的解的概念，却是一回事，带来的是相同的结果，即安全性的目标和稳定性的目标合二为一。**值**的概念兼有安全性和稳定性两个方面，而纳什均衡仅指稳定性一个方面。在非零和博弈中，安全性和稳定性是两个不同的概念。

Haiyan Lu
Jiangnan University

纳什均衡解的求取

- 二人零和博弈混合策略纳什均衡：**线性规划方法**
  - 引例

A	B			
	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(1, -1)	(4, -4)	(8, -8)	(7, -7)
a_2	(3, -3)	(2, -2)	(3, -3)	(2, -2)
a_3	(0, 0)	(3, -3)	(5, -5)	(3, -3)
a_4	(0, 0)	(4, -4)	(3, -3)	(7, -7)

- 对A来讲，策略a_3和a_4对a_1是劣策略；对B来讲，策略b_3对b_1是劣策略，策略b_4对b_2是劣策略。
- 删去上述的劣策略，得到下页中的表。

纳什均衡解的求取

- 二人零和博弈混合策略纳什均衡：**线性规划方法**
  - 引例（续）

A	B	
	b_1	b_2
a_1	(1, -1)	(4, -4)
a_2	(3, -3)	(2, -2)

- 应用**画线法**求解上表，可知该问题不存在**纯策略**意义下的纳什均衡解。
- 双方都不能连续不变地使用某种纯策略，都必须考虑如何**随机地使用自己的策略**，使对方琢磨不到自己使用何种策略，因此要用到**混合策略**。

纳什均衡解的求取

- 二人零和博弈混合策略纳什均衡：**线性规划方法**
  - 方法原理
    - 设局中人A分别以$x_1, \dots, x_m$的概率混合使用他的m种策略，设局中人B分别以$y_1, \dots, y_n$的概率混合使用他的n种策略，见下表：

A		B			
		y_1	y_2	$\cdots$	y_n
		b_1	b_2	$\cdots$	b_n
x_1	a_1	(c_{11}^a, c_{11}^b)	(c_{12}^a, c_{12}^b)	$\cdots$	(c_{1n}^a, c_{1n}^b)
x_2	a_2	(c_{21}^a, c_{21}^b)	(c_{22}^a, c_{22}^b)	$\cdots$	(c_{2n}^a, c_{2n}^b)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	a_m	(c_{m1}^a, c_{m1}^b)	(c_{m2}^a, c_{m2}^b)	$\cdots$	(c_{mn}^a, c_{mn}^b)

纳什均衡解的求取

- 二人零和博弈混合策略纳什均衡：**线性规划方法**
  - 方法原理
    - 当A采用混合策略$(x_1, \dots, x_m)$，B分别采用纯策略$b_1, \dots, b_n$时，A的期望收益分别为$\sum_{i=1}^{m} c_{i1}^{a} x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} c_{in}^{a} x_i$.
    - 根据二人零和博弈中**稳定性**(纳什均衡)与**安全性**(最大最小策略组合)的一致性，求局中人A的最大最小值（maxmin value）v_a可表示为：

$$\begin{cases} v_a = \max\limits_{x_1,\dots,x_m} \{\min\{\sum_{i=1}^{m} c_{i1}^{a} x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} c_{in}^{a} x_i\}\} \\ \qquad x_1 + \cdots + x_m = 1 \\ x_i \geq 0 \qquad\qquad (i = 1, \dots, m) \end{cases}$$

从安全性角度出发：
考虑各种可能最坏情
况，从中选取最好者。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

纳什均衡解的求取

- 二人零和博弈混合策略纳什均衡：**线性规划方法**
  - 方法原理
    - 令 $v_1=\min\{\sum_{i=1}^{m}c_{i1}^{a}x_i,\dots,\sum_{i=1}^{m}c_{in}^{a}x_i\}$，则上式可化为如下线性规划模型

$$L_1:\quad \max\{v_1\}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}^{a}x_i\ge v_1 & (j=1,\dots,n)\\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1 & \\ x_i\ge 0 & (i=1,\dots,m)\end{cases}$$

即局中人A的**最大最小策略**

    - 上式中每个不等式约束均除以v_1 (v_1**必须大于零**，故不妨设$v_1>0$)，又求$\max\{v_1\}$等价于求$\min\{1/v_1\}$，令$x_i'=x_i/v_1$，则求A的最优混合策略可进一步化为如下线性规划模型：

$$L_1{}':\quad \min\left\{\frac{1}{v_1}\right\}=x_1'+\cdots+x_m'$$

$$s.t.\begin{cases}c_{11}^{a}x_1'+\cdots+c_{m1}^{a}x_m'\ge 1\\ \qquad\cdots\cdots\\ c_{1n}^{a}x_1'+\cdots+c_{mn}^{a}x_m'\ge 1\\ x_i'\ge 0 \qquad (i=1,\dots,m)\end{cases}$$

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

纳什均衡解的求取

- 二人零和博弈混合策略纳什均衡：**线性规划方法**
  - 方法原理
    - 当B采用混合策略$(y_1, \dots, y_n)$，A分别采用纯策略$a_1, \dots, a_m$时，B的期望收益分别为$\sum_{i=1}^{m} c_{1j}^{b} y_j$, …, $\sum_{j=1}^{n} c_{mj}^{b} y_j$.
    - 根据二人零和博弈中**稳定性**(纳什均衡)与**安全性**(最大最小策略组合)的一致性，求局中人B的最大最小值（maxmin value）v_b可表示为：

$$\begin{cases} v_b = \max\limits_{y_1,\dots,y_n} \{\min\{\sum_{j=1}^{n} c_{1j}^{b} y_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} c_{mj}^{b} y_j\}\} \\ y_1 + \cdots + y_n = 1 \\ y_j \geq 0 \qquad (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

从安全性角度出发：考虑各种可能最坏情况，从中选取最好者。

纳什均衡解的求取

- 二人零和博弈混合策略纳什均衡：**线性规划方法**
  - 方法原理
    - 令 $v_2 = \min\{\sum_{j=1}^{n} c_{1j}^{b} y_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} c_{mj}^{b} y_j\}$，则上式可化为如下线性规划

$$L_2:\quad \max\{v_2\}$$
$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{b} y_j \ge v_2 & (i = 1, \ldots, m)\\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 & \\ y_j \ge 0 & (j = 1, \ldots, n)\end{cases}$$

    - 实际上，由于在二人零和博弈中，有 $c_{ij}^{b} = -c_{ij}^{a}\,(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$，因此，上述$L_1$和$L_2$是一对**互为对偶**的线性规划问题。
    - 此外，由于上述L_1和L_2各自都有可行解，因此由线性规划对偶理论可知，两者都有最优解，且最优解的目标函数值相等，该最优值称为该博弈**在混合策略意义下的值**。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

纳什均衡解的求取

- 二人零和博弈混合策略纳什均衡：**线性规划方法**
  - 方法原理
    - 令 $\overline{v_2}=-v_2$，则上述线性规划问题L_2等价于下面的线性规划问题$\overline{L_2}$

$$\overline{L_2}:\quad \min\{\overline{v_2}\}$$
$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{a} y_j \le \overline{v_2}(i=1,\dots,m)\\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\\ y_j \ge 0 \qquad\qquad (j=1,\dots,n)\end{cases}$$

即局中人**B**的**最小最大策略**

- 上式中每个不等式约束均除以$\overline{v_2}$ ($\overline{v_2}$**必须大于零**，故不妨设$\overline{v_2}>0$)，又求$\min\{\overline{v_2}\}$等价于求$\max\{1/\overline{v_2}\}$，令$y_i'=y_i/\overline{v_2}$，则求B的最优混合策略可进一步化为如下线性规划模型：

$$\overline{L_2}':\quad \max\left\{\frac{1}{\overline{v_2}}\right\}=y_1'+\cdots+y_n'$$
$$s.t.\begin{cases}c_{11}^{a}y_1'+\cdots+c_{1n}^{a}y_n'\le 1\\ \qquad\dots\dots\\ c_{m1}^{a}x_1'+\cdots+c_{mn}^{a}y_n'\le 1\\ y_j'\ge 0 \qquad (j=1,\dots,n)\end{cases}$$

Haiyan Lu
Jiangnan University

纳什均衡解的求取

- 二人零和博弈混合策略纳什均衡：**线性规划方法**
  - 例4 求下表所示二人零和博弈的纳什均衡解。

A	B	
	b_1	b_2
a_1	(1, -1)	(4, -4)
a_2	(3, -3)	(2, -2)

由引例中的分析可知，该问题不存在纯策略意义上的纳什均衡解

  - 解：
    - 设局中人A分别以x_1, x_2的概率使用a_1、a_2两个策略，局中人B分别以y_1, y_2的概率使用b_1、b_2两个策略。
    - 由于本例中B的收益均为**负值**，考虑到最优混合策略的线性规划模型中v'和v''不允许为零或负值，因此在B的每个收益值上加上数值k=4 (得到下表)，最后再从最终博弈的期望值中减去k即可。

A	B	
	b_1	b_2
a_1	(1, 3)	(4, 0)
a_2	(3, 1)	(2, 2)

纳什均衡解的求取

- 二人零和博弈混合策略纳什均衡：线性规划方法
  - (例4)解（续）：
    - 根据上表写出求解局中人A、B的最优混合策略的线性规划模型L_1和L_2:

$$L_1:\quad \min\left\{\frac{1}{v_1}\right\} = x_1' + x_2' \qquad\qquad L_2:\quad \min\left\{\frac{1}{v_2}\right\} = y_1' + y_2'$$

$$s.t.\begin{cases} x_1' + 3x_2' \geq 1 \\ 4x_1' + 2x_2' \geq 1 \\ x_1', x_2' \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad s.t.\begin{cases} 3y_1' \geq 1 \\ y_1' + 2y_2' \geq 1 \\ y_1', y_2' \geq 0 \end{cases}$$

    - 用（对偶）单纯形法求解，可得

$$x_1' = 0.1, x_2' = 0.3,\ v_1 = \frac{1}{0.1+0.3} = 2.5;\text{故 } x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}.$$

$$y_1' = \frac{1}{3}, y_2' = \frac{1}{3},\ v_2 = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{3}{2};\text{故 } y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}.$$

    - 故局中人A的最优混合策略为$X^* = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$，局中人B的最优混合策略为$Y^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，$(X^*, Y^*)$就是混合策略意义上的纳什均衡解。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

纳什均衡解的求取

- 备注
  - 对于二人（有限）零和博弈，上述L_1和L_2实际上为一对**互为对偶**的**线性规划**模型。因此，由线性规划的对偶理论，只需求得其中一个问题的解，同时也就得到了其对偶问题的解。
  - 对于二人（有限）零和博弈，除了线性规划方法，还可以用图解法、方程组法等方法来求解。
  - 对于二人（有限）非零和博弈，可以通过求解一个**二次规划**来求得纳什均衡解。解线性规划存在有效的算法，然而，解一般的二次规划却没有已知的有效算法。
  - 对于2×2型的非零和博弈，也可以采用**计算均衡点（几何法）**来求得纳什均衡。
  - 寻求纳什均衡的一个有效工具是无差异原则，即：如果一个混合策略纳什均衡要求局中人以正的概率使用两个不同的纯策略，假定其他局中人按照均衡解选择策略，则该局中人选择某个纯策略的预期收益应该等于他选择另一个纯策略的预期收益。

补充练习

- 1、用线性规划方法求如下二人零和博弈问题

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

解：

求解问题可化为如下两个互为对偶的线性规划问题

$$P:\quad \min(x_1+x_2+x_3)$$

$$s.t.\begin{cases} 7x_1+2x_2+9x_3\geq 1 \\ 2x_1+9x_2 \qquad\qquad \geq 1 \\ 9x_1+ \qquad\quad 11x_3\geq 1 \\ \quad x_1,x_2,x_3\geq 0 \end{cases}$$

$$D:\quad \max(y_1+y_2+y_3)$$

$$s.t.\begin{cases} 7y_1+2y_2+9y_3\leq 1 \\ 2y_1+9y_2 \qquad\qquad \leq 1 \\ 9t_1+ \qquad\quad 11y_3\leq 1 \\ \quad y_1,y_2,y_3\geq 0 \end{cases}$$

补充练习

解（续）：

利用单纯形法求解问题D，得到问题D的解为

$$y=(\frac{1}{20},\frac{1}{10},\frac{1}{20})^T,\omega=\frac{16}{80}$$

由求解问题D的最终单纯形表的检验数行可得问题P的解为

$$x=(\frac{4}{80},\frac{8}{80},\frac{4}{80})^T,z=\frac{16}{80}$$

从而得到该博弈的值为

$$v=\frac{80}{16}=5$$

局中人I和II的最优策略分别为

$$x^*=v\cdot\left(\frac{4}{80},\frac{8}{80},\frac{4}{80}\right)^T=\left(\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4}\right)^T$$

$$y^*=v\cdot\left(\frac{1}{20},\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)^T=\left(\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4}\right)^T$$

补充练习

- 2、用图解法求如下二人零和博弈问题

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \end{array}$$

解：

设局中人I的混合策略为$(x, 1-x)^T$，则他的收益为x的函数，取决于局中人II的策略：

- 若局中人II选择L：$U(x, L) = 5x + 3(1-x) = 2x + 3$
- 若局中人II选择R：$U(x, R) = 0x + 4(1-x) = -4x + 4$

下页的图给出了这两个函数的图形。

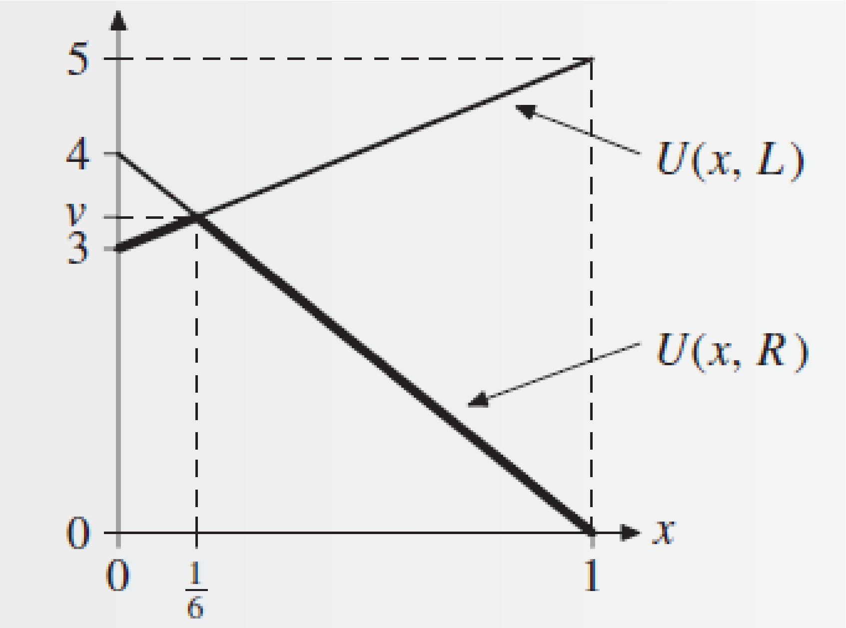
粗线表示的函数为局中人I选择x所得到的最低收益

$$\min_{s_{II} \in S_{II}} U(x, s_{II})$$

这些最小值构成的折线称为局中人I收益的下包络。

补充练习

解（续）：



该博弈的混合策略的值等于$\max\limits_{\sigma_I \in \sum_I} \min\limits_{s_{II} \in S_{II}} U(\sigma_I, s_{II})$为下包络的最大值。该最大值出现在上图中两条直线的交点，即由如下方程决定的点（$x = \frac{1}{6}$）：

$$2x + 3 = -4x + 4$$

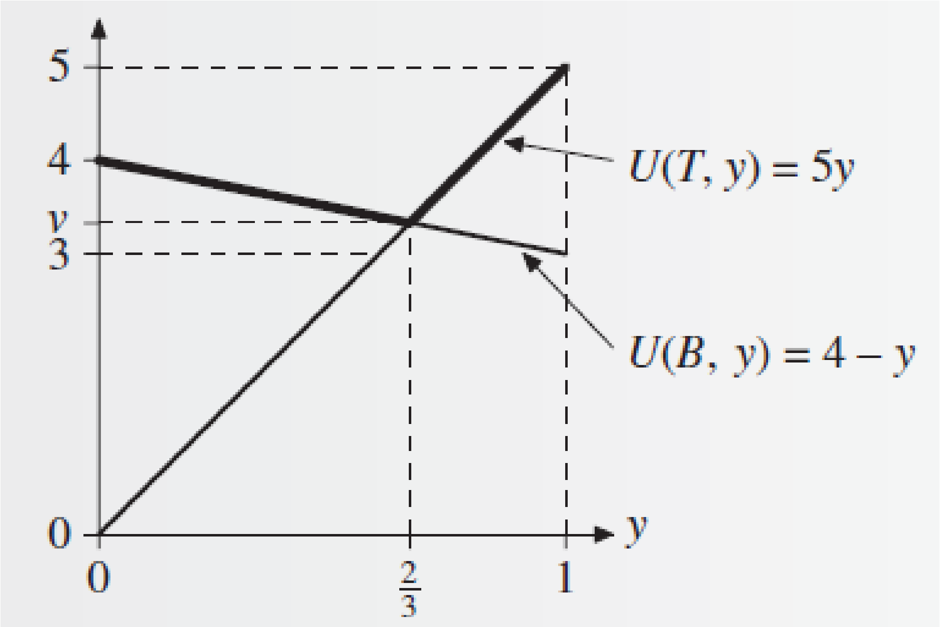
因此局中人I的最佳策略（即均衡策略）是$(\frac{1}{6}, \frac{5}{6})^T$，

博弈的混合策略值就是交点的高度$v = 2 \times \frac{1}{6} + 3 = 3\frac{1}{3}$.

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

补充练习

解（续）：



通过类似计算，可求得局中人II的最佳策略，即找出使得达到最小值 $\min_{\sigma_{II}\in\Sigma_{II}} \min_{s_I\in S_I} U(s_I, \sigma_{II})$的策略。该最小值出现在上图中两条直线形成的上包络的交点，是上包络的最小值。求解方程$5y = 4 - y$可得$y = \frac{2}{3}$.

因此局中人II的最佳策略（即均衡策略）是$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$，

博弈的混合策略值就是交点的高度$v = 5 \times \frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

补充练习

- 备注
  - 对于$2 \times n$和$m \times 2$型的二人有限零和博弈，也可以用图解法来分析求解。
    - 假设局中人I有两个纯策略。将局中人I的收益表示为局中人II的每个纯策略的函数（一条直线），这是一个关于x的函数，x是局中人I选择的混合策略。找出这些直线的下包络，然后找到下包络的最大值。这个最大值就是博弈的混合策略值。然后寻找局中人II的纯策略，满足各纯策略的收益对应的直线的交点包含下包络的最大值。
      - 可能有超过两个纯策略对应的直线包括下包络的最大值。在这种情况下，只需要选择两个这样的策略：一个策略对应的直线是非递增的，另一个策略对应的直线是非递减的。
      - 找到这样的两个纯策略之后，求解相应的线性方程组，可得到局中人II的最佳策略，即找到两条线的加权平均，使其成为一条水平线。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

补充练习

- 3、用计算均衡点的方法求下述非零和博弈的纳什均衡。

Example 5.17 **Battle of the Sexes** The Battle of the Sexes game, which we saw in Example 4.21 (page 98), appears in Figure 5.10.

Player II

Player I		F	C
	F	2, 1	0, 0
	C	0, 0	1, 2

Figure 5.10 Battle of the Sexes

Recall that for each mixed strategy $[x(F), (1-x)(C)]$ of Player I (which we will refer to as x for short), we denoted the collection of best replies of Player II by:

$$\mathrm{br}_{\mathrm{II}}(x) = \mathrm{argmax}_{y\in[0,1]} u_{\mathrm{II}}(x, y) \tag{5.37}$$

$$= \{y \in [0,1] \colon u_{\mathrm{II}}(x, y) \geq u_{\mathrm{II}}(x, z) \quad \forall z \in [0,1]\}. \tag{5.38}$$

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

补充练习

Similarly, for each mixed strategy $[y(F), (1-y)(C)]$ of Player II (which we will refer to as y for short), we denoted the collection of best replies of Player I by:

$$\begin{aligned} \mathrm{br}_{\mathrm{I}}(y) &= \mathrm{argmax}_{x \in [0,1]} u_{\mathrm{I}}(x, y) && (5.39) \\ &= \{x \in [0,1] : u_{\mathrm{I}}(x, y) \geq u_{\mathrm{I}}(z, y) \quad \forall z \in [0,1]\}. && (5.40) \end{aligned}$$

In the Battle of the Sexes, these correspondences[1] are given by

$$\mathrm{br}_{\mathrm{II}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < \frac{2}{3}, \\ [0,1] & \text{if } x = \frac{2}{3}, \\ 1 & \text{if } x > \frac{2}{3}. \end{cases} \qquad \mathrm{br}_{\mathrm{I}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y < \frac{1}{3}, \\ [0,1] & \text{if } y = \frac{1}{3}, \\ 1 & \text{if } y > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Figure 5.11 depicts the graphs of these two set-valued functions, br_{I} and $\mathrm{br}_{\mathrm{II}}$. The graph of $\mathrm{br}_{\mathrm{II}}$ is the lighter line, and the graph of br_{I} is the darker line. The two graphs are shown on the same set of axes, where the x-axis is the horizontal line, and the y-axis is the vertical line. For each $x \in [0, 1]$, $\mathrm{br}_{\mathrm{II}}(x)$ is a point or a line located above x. For each $y \in [0, 1]$, $\mathrm{br}_{\mathrm{I}}(y)$ is a point or a line located to the right of y.

Haiyan Lu
Jiangnan University

补充练习

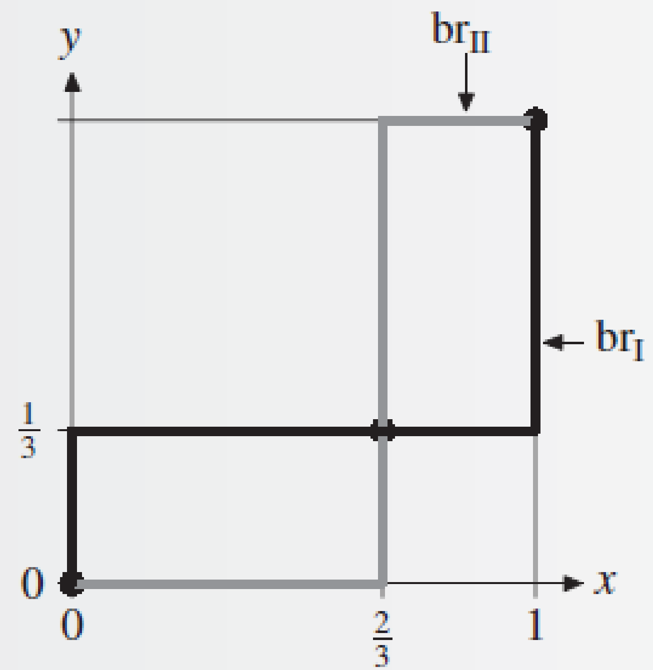


Figure 5.11 The graphs of br_I (black line) and of br_{II} (grey line)

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

补充练习

A point (x^*, y^*) is an equilibrium point if and only if $x^* \in \mathrm{br}_{\mathrm{I}}(y^*)$ and $y^* \in \mathrm{br}_{\mathrm{II}}(x^*)$. This is equivalent to (x^*, y^*) being a point at which the two graphs br_{I} and $\mathrm{br}_{\mathrm{II}}$ intersect (verify this for yourself). As Figure 5.11 shows, these graphs intersect in three points:

- $(x^*, y^*) = (0, 0)$: corresponding to the pure strategy equilibrium (C, C).
- $(x^*, y^*) = (1, 1)$: corresponding to the pure strategy equilibrium (F, F).
- $(x^*, y^*) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$: corresponding to the equilibrium in mixed strategies

$$x^* = \left[\tfrac{2}{3}(F), \tfrac{1}{3}(C)\right], \quad y^* = \left[\tfrac{1}{3}(F), \tfrac{2}{3}(C)\right]. \tag{5.41}$$

Note two interesting points:

- The payoff at the mixed strategy equilibrium is $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. For each player, this payoff is worse than the worst payoff he would receive if either of the pure strategy equilibria were chosen instead.
- The payoff $\frac{2}{3}$ is also the security level (maxmin value) of each of the two players (verify this), but the maxmin strategies guaranteeing this level are not equilibrium strategies; the maxmin strategy of Player I is $[\frac{1}{3}(F), \frac{2}{3}(C)]$, and the maxmin strategy of Player II is $[\frac{2}{3}(F), \frac{1}{3}(C)]$. ◀

This geometric procedure for computing equilibrium points, as intersection points of the graphs of the best replies of the players, is not applicable if there are more than two players or if each player has more than two pure strategies. But there are cases in which this procedure can be mimicked by finding solutions of algebraic equations corresponding to the intersections of best-response graphs.

补充练习

- 4、用无差异原则（the indifference principle）求下述非零和博弈的纳什均衡。

Example 5.9 (*Continued*) The payoff matrix in this game appears in Figure 5.12.

Player II

		L	R
Player I	T	1, −1	0, 2
	B	0, 1	2, 0

Figure 5.12 The payoff matrix in Example 5.9

As we have already seen, the only equilibrium point in this game is

$$\left(\left[\tfrac{1}{4}(T), \tfrac{3}{4}(B)\right], \left[\tfrac{2}{3}(L), \tfrac{1}{3}(R)\right]\right). \qquad (5.49)$$

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

补充练习

Definition 5.19 *A mixed strategy* σ_i *of player* i *is called a* completely mixed strategy *if* $\sigma_i(s_i) > 0$ *for every pure strategy* $s_i \in S_i$. *An equilibrium* $\sigma^* = (\sigma_i^*)_{i \in N}$ *is called a* completely mixed equilibrium *if for every player* $i \in N$ *the strategy* σ_i^* *is a completely mixed strategy.*

In words, a player's completely mixed strategy chooses each pure strategy with positive probability. It follows that at every completely mixed equilibrium, every pure strategy vector is chosen with positive probability.

We will now compute the equilibrium using the indifference principle. The first step is to ascertain, by direct inspection, that the game has no pure strategy equilibria. We can also ascertain that there is no Nash equilibrium of this game in which one of the two players plays a pure strategy. By Nash's Theorem (Theorem 5.10), the game has at least one equilibrium in mixed strategies, and it follows that at every equilibrium of the game both players play completely mixed strategies. For every pair of mixed strategies (x, y), we have that $U_{\mathrm{II}}(x, L) = 1 - 2x$, $U_{\mathrm{II}}(x, R) - 2x$, $U_{\mathrm{I}}(T, y) = y$, and $U_{\mathrm{I}}(B, y) = 2(1 - y)$. By the indifference principle, at equilibrium Player I is indifferent between playing T and playing B, and Player II is indifferent between L and R. In other words, if the equilibrium is (x^*, y^*), then:

补充练习

- Player I is indifferent between T and B:

$$U_{\mathrm{I}}(T, y^*) = U_{\mathrm{I}}(B, y^*) \implies y^* = 2(1 - y^*) \implies y^* = \tfrac{2}{3}. \qquad (5.50)$$

- Player II is indifferent between L and R:

$$U_{\mathrm{II}}(x^*, L) = U_{\mathrm{II}}(x^*, R) \implies 1 - 2x^* = 2x^* \implies x^* = \tfrac{1}{4}. \qquad (5.51)$$

We have, indeed, found the same equilibrium that we found above, using a different procedure. Interestingly, in computing the mixed strategy equilibrium, each player's strategy is determined by the payoffs of the other player; each player plays in such a way that the other player is indifferent between his two pure strategies (and therefore the other player has no incentive to deviate). This is in marked contrast to the maxmin strategy of a player, which is determined solely by the player's own payoffs. This is yet another expression of the significant difference between the solution concepts of Nash equilibrium and maxmin strategy, in games that are not two-player zero-sum games. ◀

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

补充练习

- 5、求下述二人博弈的纳什均衡。

Example 5.21 Consider the following two-player game in which $N = \{\text{I}, \text{II}\}$ (Figure 5.13).

Player II

Player I		L	C	R
	T	6, 2	0, 6	4, 4
	M	2, 12	4, 3	2, 5
	B	0, 6	10, 0	2, 2

Figure 5.13 The strategic-form game in Example 5.21

补充练习

In this game, no pure strategy is dominated by another pure strategy (verify this). However, strategy M of Player I is strictly dominated by the mixed strategy $[\frac{1}{2}(T), \frac{1}{2}(B)]$ (verify this). It follows from Theorem 5.20 that the deletion of strategy M has no effect on the set of equilibria in the game. Following the deletion of strategy M, we are left with the game shown in Figure 5.14.

Player II

Player I		L	C	R
	T	6, 2	0, 6	4, 4
	B	0, 6	10, 0	2, 2

Figure 5.14 The game after eliminating strategy M

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

补充练习

In this game, strategy R of Player II is strictly dominated by the mixed strategy $[\frac{5}{12}(L), \frac{7}{12}(C)]$. We then delete R, which leaves us with the game shown in Figure 5.15.

Player II

		L	C
Player I	T	6, 2	0, 6
	B	0, 6	10, 0

Figure 5.15 The game after eliminating strategies M and R

The game shown in Figure 5.15 has no pure strategy equilibria (verify this). The only mixed equilibrium of this game, which can be computed using the indifference principle, is $([\frac{3}{5}(T), \frac{2}{5}(B)], [\frac{5}{8}(L), \frac{3}{8}(R)])$, which yields payoff $(\frac{15}{4}, \frac{18}{5})$ (verify this, too).

Since the strategies that were deleted were all strictly dominated strategies, the above equilibrium is also the only equilibrium of the original game. ◀

应用举例

- 例5 古诺(Cournot)的寡头竞争模型
  - 有两个生产相同产品的企业A和B，其产量分别为q_1 和 q_2，市场的总供应量为$Q = q_1 + q_2$。设$P(Q) = 12 - Q$表示市场出清时的单位产品价格（即将产品全部售出时的单位产品价格），又企业i生产q_i产品时无固定成本，生产单位产品的边际成本为常数3，也即总成本为$C_i(q_i) = 3q_i$。求当A、B两企业在互不知道情况下独立决策的纳什均衡解。
  - 备注
    - **边际成本**：在经济学和金融学中，边际成本指的是每一单位新增生产的产品（或者购买的产品）带来的总成本的增量。

应用举例

- (例5)解：
  - A、B两企业产量分别为q_1 和q_2时各自的收益函数分别为
    $u_1 = q_1P(Q) - C_1(q_1) = q_1(12 - q_1 - q_2) - 3q_1 = 9q_1 - q_1^2 - q_1q_2$
    $u_2 = q_2P(Q) - C_2(q_2) = q_2(12 - q_1 - q_2) - 3q_2 = 9q_2 - q_2^2 - q_1q_2$
  - 由于是连续变量，不能用对矩阵进行画线的方法求解。可根据下式通过求导的方法进行求解：

s_i^*是以下优化问题的最优解

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i \ , s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

  - 设是(q_1^*, q_2^*)本例的纳什均衡解，则q_1^*, q_2^*分别是下述优化问题的解

$$\max_{q_1 \in S_1} u_1(q_1 \ , q_2^*), \quad \max_{q_2 \in S_2} u_2(q_1^*, q_2 \ )$$

  - 因此由$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial q_1} = 9 - 2q_1 - q_2 = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial q_2} = 9 - 2q_2 - q_1 = 0 \end{cases}$，得到 $\begin{cases} q_1^* = 3 \\ q_2^* = 3 \end{cases}$，$u_1^* = u_2^* = 9$

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

应用举例

- 备注
  - **例5**中求得两企业分别独立决策时，两企业的收益总和为18.
  - 下面将两企业作为一个总体来考虑，其收益为

$$u(Q) = Q(12 - Q) - 3Q = 9Q - Q^2$$

当$Q = Q^* = 4.5$时，上式取得最大值$u(Q^*) = 20.25$；同时参照**例5**的结果，知A、B两个企业各自的产量应为

$$q_1{}^* = q_1{}^* = 2.25,$$

各自的收益应为

$$u_1^* = u_2^* = 10.125.$$

  - 将**例5**及上述分析结果列于下表：

A	B	
	$q_1 = 2.25$	$q_2 = 3$
$q_1 = 2.25$	(10.125, 10.125)	(8.4375, 11.25)
$q_2 = 3$	(11.25, 8.4375)	(9, 9)

应用举例

- 备注
  - 将**例5**及上述分析结果列表如下：

A	B	
	$q_1=2.25$	$q_2=3$
$q_1=2.25$	(10.125, 10.125)	(8.4375, 11.25)
$q_2=3$	(11.25, 8.4375)	(9, 9)

  - 前述将两企业作为一个总体来考虑时，两企业的各自最优策略为$q_1=q_2=2.25$.
  - 按照非合作博弈采用**画线法**求解，得到纳什均衡解为$q_1=q_2=3$.
  - 该例情形与**囚徒困境**类似。目前市场上的彩电、冰箱、空调等的大战，正是反映了各企业只从追求自己利润最大化考虑进行独立决策，而不是从整体的利益统一考虑。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

应用举例

- 例6 有甲、乙两支游泳队举行包括三个项目的对抗赛。这两支游泳队各有一名健将级运动员（甲队为李，乙队为王），在三个项目中成绩都很突出。但规则准许他们每人分别只能参加两项比赛，而每队的其他两名运动员则可能参加全部三项比赛。已知各运动员预赛比赛成绩（单位：s）见下表：

	甲队			乙队		
	赵	钱	李	王	张	孙
100米蝶泳	54.7	58.2	52.1	53.6	56.4	59.8
100米仰泳	62.2	63.4	58.2	56.5	59.7	61.5
100米蛙泳	69.1	70.5	65.3	67.8	68.4	71.3

- 假定各运动员在比赛中都能发挥正常水平，达到预赛成绩。又规定每项比赛第一名得5分，第二名得3分，第三名得1分，问每队的教练应决定让自己的健将级运动员参加哪两项比赛，使本队的期望得分为最多（各队出场名单互相保密，且在确定后不准变动）？

Haiyan Lu
Jiangnan University

应用举例

此为完全信息静态博弈

- (例6)解：
- 设甲$_1$、甲$_2$、甲$_3$表示甲队中李姓健将分别不参加蝶泳、仰泳、蛙泳比赛的策略，乙$_1$、乙$_2$、乙$_3$表示乙队中王姓健将分别不参加蝶泳、仰泳、蛙泳比赛的策略。计算出甲、乙两队的策略组成的每种局势下甲、乙两队的各自得分，得到下表：

甲队	乙队		
	~~乙$_1$~~	乙$_2$	乙$_3$
甲$_1$	~~(14, 13)~~	(13, 14)	(12, 15)
~~甲$_2$~~	~~(13, 14)~~	~~(12, 15)~~	~~(12, 15)~~
甲$_3$	~~(12, 15)~~	(12, 15)	(13, 14)

- 由于甲队的策略甲$_2$劣于甲$_1$，乙队的策略乙$_1$劣于乙$_2$，因此将劣策略甲$_2$和乙$_1$从上表中删除，得到下表（见下页）。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

应用举例

- (例6)解（续）：

甲队	乙队	
	乙$_2$	乙$_3$
甲$_1$	(13, 14)	(12, 15)
甲$_3$	(12, 15)	(13, 14)

- 用画线法求解，可知不存在纯策略意义下的纳什均衡解。
- 用无差异原则求解混合策略意义下的纳什均衡解。
  - 设甲队分别以x和$1-x$的概率采用策略甲$_1$和甲$_3$，乙队分别以y和$1-y$的概率采用策略乙$_2$和乙$_3$。对于每一对混合策略(x,y)，有

$$U_{甲}(甲_1,y)=13y+12(1-y)=y+12$$
$$U_{甲}(甲_3,y)=12y+13(1-y)=-y+13$$
$$U_{乙}(x,乙_2)=14x+15(1-x)=-x+15$$
$$U_{乙}(x,乙_3)=15x+14(1-x)=x+14$$

应用举例

- (例6)解（续）：
  - 由无差异原则可知：

$$U_{甲}(甲_1,y)=U_{甲}(甲_3,y)，\ U_{乙}(x,乙_2)=U_{乙}(x,乙_3)$$

  - 求解可得

$$x^*=\frac{1}{2},y^*=\frac{1}{2}$$

  - 因此得到甲队的纳什均衡策略为

$$(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})^T$$

乙队的纳什均衡策略为

$$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$$

混合策略均衡对应的收益为

$$(\frac{25}{2},\frac{29}{2})$$

应用举例

- 例7 工厂排污和监督检查的博弈
  - 工厂生产中经常排污水和各种废弃物，为了达到排污标准，每月需处理费p元。环保部门若将该厂纳入检查范围，则每月开支检查费为G元。一旦检查中发现工厂对污水等未进行处理而直接排放，则将予以罚款，预期每月罚款数为S元 ($S>p$, $S>G$)。试分析工厂与环保部门各自的最优策略。
- 解：
  - 本例中环保部门的策略有检查和不检查，工厂的策略有对污水处理和不处理，由题意列出双方各自的策略及相应的收益值，见下表：

环保部门	工厂	
	处理污水	不处理污水
检查	$(-G, \underline{-p})$	$(\underline{S-G}, -S)$
不检查	$(\underline{0}, -p)$	$(0, \underline{0})$

  - 采用**画线法**求解，可知不存在纯策略意义下的纳什均衡解。
  - 因此需考虑混合策略意义下的纳什均衡解。

应用举例

- (例7)解（续）：
  - 设环保部门采取检查和不检查策略的概率分别为x_1和x_2， $x_1+x_2=1, x_1\geq 0, x_2\geq 0$；工厂采取处理污水和不处理污水策略的概率分别为$y_1$和$y_2$，$y_1+y_2=1, y_1\geq 0, y_2\geq 0$。应用**线性规划法**可求得双方各自的最优混合策略。
  - 分析：
    - 从工厂来考察：工厂采用处理污水策略的期望收益为$-p$；采用不处理污水策略的期望收益为$-Sx_1$。令$-p = -Sx_1$，得$x_1= p/S$。因此，为促使工厂处理污水，应有$-p \geq -Sx_1$，即 $x_1\geq p/S$，故应增加检查密度。
    - 从环保部门来考察：环保部门采用检查策略的期望收益为$-Gy_1+(S-G)y_2$；采用不检查策略的期望收益为0。令$-Gy_1+(S-G)y_2 =0$，得$y_2=G/S$。因此，为促使工厂处理污水，应减小y_2的概率，在检查费用G不变的情况下，应加大罚款数额S。
- 备注
  - 例7的分析可应用于研究委托-代理以及一般的监督检查问题。在此类问题中，监督或委托方为防止被监督或代理方偷懒取巧，应采取增大检查密度和加大处罚措施；而被监督或代理一方，则交替使用自己的策略，力求使自己取得有利的结局。

多重纳什均衡和聚点

- 概述
  - 很多博弈问题存在一个以上的纳什均衡，此时应如何判断或预期最终结局？
    - 聚点(focal point)：是指在一些现实生活中，局中人依据一些信息或理性，在某个特定均衡上的协同。
- 举例
  - 甲、乙两人商量周末的活动安排，是看足球还是听音乐会。已知不同策略组合下的收益值见下表：

甲方	乙方	
	足球	音乐会
足球	(3, 1)	(-1, -1)
音乐会	(-1, -1)	(1, 3)

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

多重纳什均衡和聚点

- 举例
  - 用画线法求解，得到两个纯策略的纳什均衡解：(足球，足球)、(音乐会，音乐会)。

甲方	乙方	
	足球	音乐会
足球	(3, 1)	(-1, -1)
音乐会	(-1, -1)	(1, 3)

  - 若对甲、乙双方的性格或周末的背景等一无所知，则很难预测最后的结局。
  - 但若知道甲方比较尊重乙方爱好，则该例中纳什均衡的聚点会是(音乐会，音乐会)；若该周末的足球赛是一场精彩的国际赛事，而音乐会较一般，则该例的聚点就会是(足球，足球)。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

多重纳什均衡和聚点

- 备注
  - 多数情况下，纳什均衡的聚点与人们的习惯、文化、经历信仰等有关。
    - 举例说明：下表中所示的博弈问题中有两个纳什均衡解：(U,L)和(D,R)，其中(U,L)时的双方受益明显优于(D,R)时的双方受益。但**从减小风险的角度**，A、B双方可能聚焦于(D,R)。**原因是**：如果选择(U,L)，一旦对方恶意改变策略，虽然对方也遭受一点损失，但将使己方一无所获，因此双方均承担较大风险。而选择(D,R)时，则不存在此类风险。

A	B	
	L	R
U	(10, 10)	(0, 8)
D	(8, 0)	(6, 6)

    - 因此，当存在多重纳什均衡解时，通过联系博弈背景及各局中人的习性，在一定条件下可推断聚点的出现。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

课堂练习：判断题（T/F）

- 矩阵博弈中，若最优解要求一个局中人采取纯策略，则另一局中人也必须采取纯策略。 F
- 矩阵博弈中当局势达到均衡时，任何一方单方面改变自己的策略（纯策略或混合策略）将意味着自己更少的赢得或更大的损失。 T
- 任何矩阵博弈一定存在混合策略意义下的解。 T
- 完全信息博弈是指每个局中人对所有局中人各自的策略集以及各种局势下的收益向量有完全充分了解。 T
- 任何二人有限零和博弈一定存在混合策略意义下的解，并可通过求解一对互为对偶的线性规划问题得到。 T

完全信息动态博弈

第3节

基本概念

- 静态博弈与动态博弈
  - 静态博弈中，局中人同时采取或在互相保密的情况下采取行动，在行动要分步骤执行的情况下，每步的方案都在开始时就拟定，方案一经确定，中途不允许变更。
  - 动态博弈中，博弈过程按时间先后划分阶段，局中人行动有先后，后采取行动者可观察到先采取行动者的行动，并决定或修改自己的行动。
- 承诺、威胁及其可信度
  - 由于动态博弈中局中人行动有先后，先行动者必须考虑后行动者对自己行动的反应，而后行动者出于对自身利益的考虑，可能对先行动者提出希望采取或不采取某种行动的暗示，即承诺或威胁。
  - 承诺或威胁会影响局中人的行动以致博弈的结局。**承诺或威胁的可信度**是影响动态博弈结局的中心问题之一。

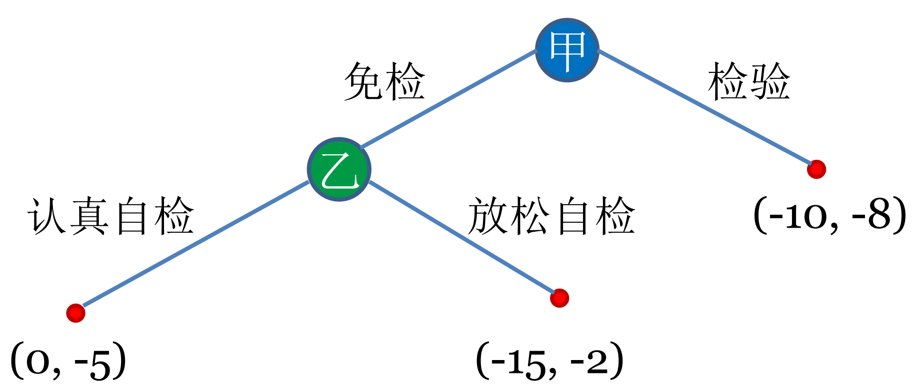
基本概念

- 完全且完美信息的动态博弈
  - 完全信息博弈
    - 是指每个局中人对所有局中人各自的策略集以及各种局势下的收益向量有完全充分的了解。
      - 对于静态博弈，完全信息的概念已经足够。
      - 对于动态博弈，在具有完全信息情况下，若在每个阶段初局中人对之前的信息都有完全充分了解，则称这样的博弈为完全且完美信息的动态博弈；否则称为完全但不完美信息的动态博弈。

（本节只介绍完全且完美信息的动态博弈）

承诺、威胁及其可信度

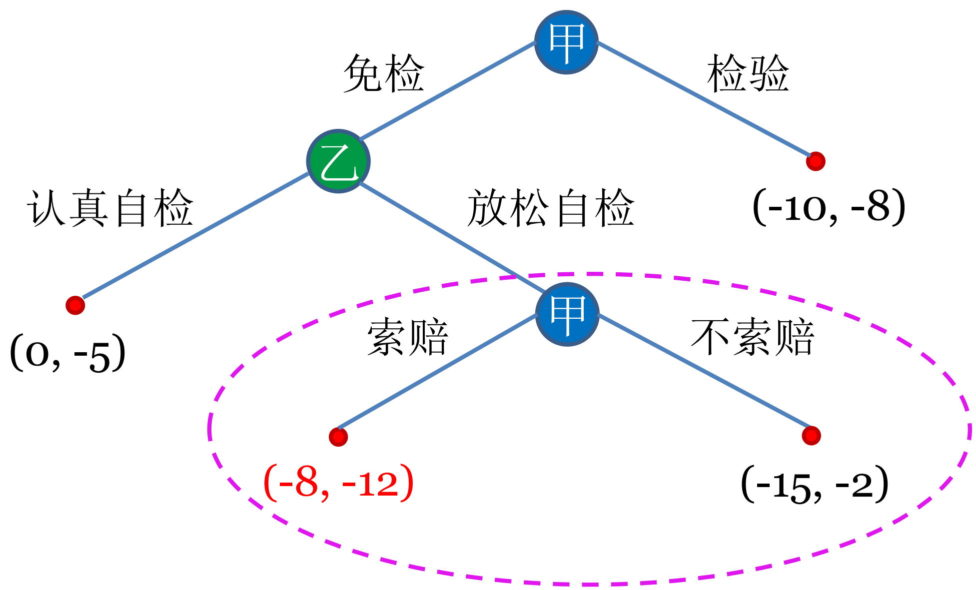
- 例8 下游企业甲厂定期购买上游企业乙厂生产的零部件，每月甲厂用于对上述零部件进行检验所需的检验费为10万元，乙厂为提供检验所需的自检及有关准备费为8万元。
  - 由于两厂关系较好，同时乙厂提供的零部件质量逐渐取得了甲厂的信任，为缩短产品周期，两厂商定在乙厂认真自检保证质量基础上，甲厂可予免检。在这种情况下，甲厂检验费降为0，乙厂自检等费用降为每月5万元。
  - 但随着时间推移，乙厂逐渐放松自检，自检费减至2万元，使甲厂产品质量下降，每月损失15万元。
  - 上述情况可用如下的博弈树图来表示，分析可知：在缺乏严格法律约束条件下，乙厂认真自检的承诺可能不会自觉执行。



Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

承诺、威胁及其可信度

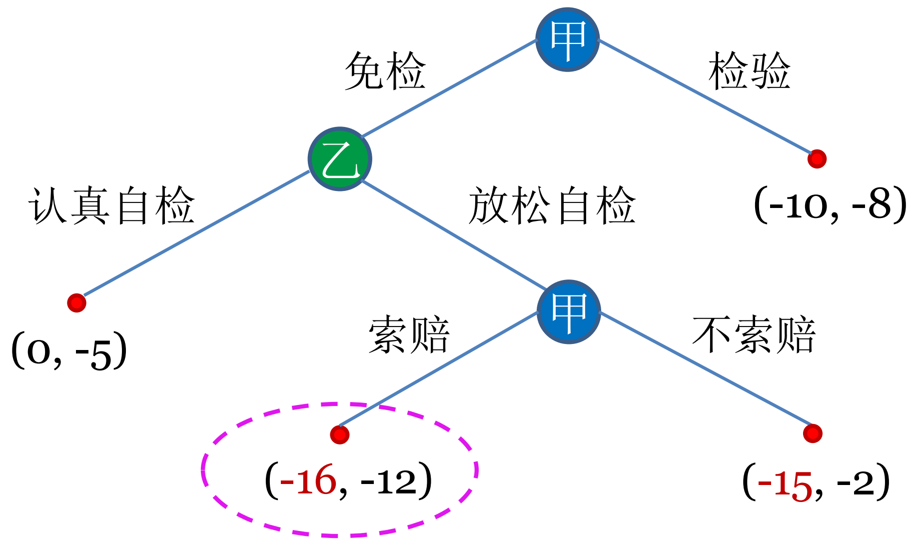
- 例8(续)
  - 甲厂估计到乙厂可能不会自觉执行认真自检的承诺，因此在商定乙厂认真自检条件下可免检的同时，也明确指出乙厂若放松自检出现产品质量问题时，保留索赔的权利。当甲厂提出索赔时，除去索赔的开支，甲厂的损失可减至8万元，而乙厂的支出将增至12万元，见下图：
    - 由于甲厂提出索赔，使乙厂意识到放松自检将给自己带来更大损失，这样又回归到认真自检的行动，从而使甲厂也回到给予乙厂零部件免检的决定。



Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

承诺、威胁及其可信度

- 例8(续)
  - 甲厂保留索赔权利对乙厂而言是一种威胁，这种威胁迫使乙厂不敢违背认真自检的承诺。但由于实际执行索赔时程序复杂，有时索赔所获得的补偿还不足以弥补甲厂为索赔花出的支付，见下图中的示例：



- 对于该示例，甲厂从自身利益出发，就会放弃索赔的行动，从而使乙厂可以不兑现承诺，导致甲厂恢复对乙厂生产的零部件进行检验。

承诺、威胁及其可信度

- 备注
  - 上述例子表明：
    - 承诺分为可信与不可信承诺
      - 当履行承诺的收益低于不履行承诺的收益时，相应局中人会选择不履行承诺。
    - 威胁分为可信与不可信威胁
      - 当威胁确实能给威胁方带来利益时，威胁是可信的，否则威胁的执行反而会给自己造成不利结局时，威胁是不可信的。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

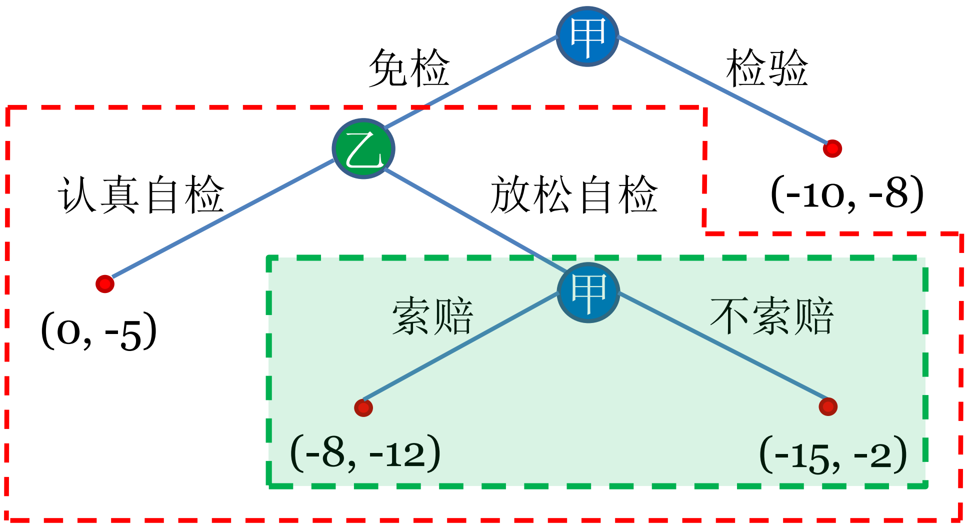
完全且完美信息动态博弈的求解

- 子博弈
  - 子博弈是动态博弈中从某一阶段开始到博弈过程结束的整个博弈的一部分，且：
    - (1) 子博弈必须从一个单点信息集开始；
    - (2) 子博弈的信息集和收益函数都直接继承自原博弈，不允许在子博弈中出现原博弈中没有的信息，也不允许子博弈的结论不适用于原博弈。
- 备注：
  - 子博弈是动态博弈的重要概念。
  - 对完全且完美信息动态博弈问题的求解是建立在子博弈精炼纳什均衡的基础上的。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

完全且完美信息动态博弈的求解

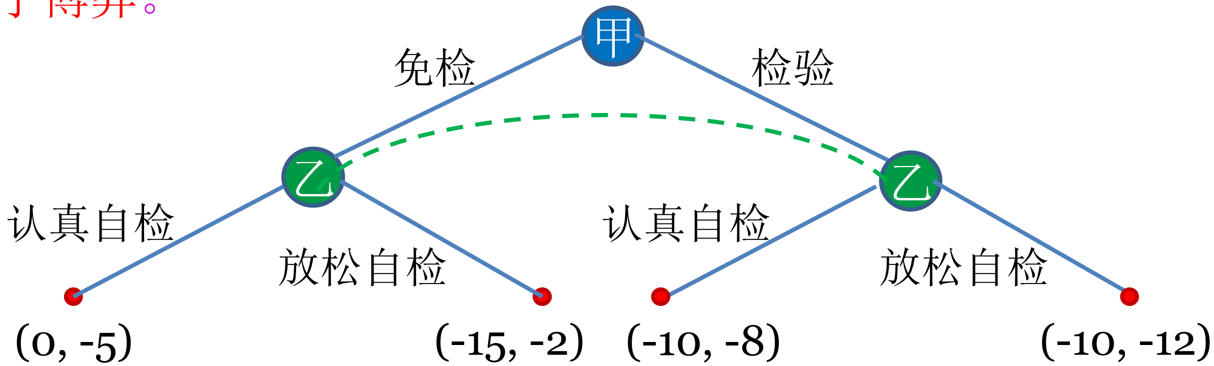
- 子博弈
  - 举例：
    - 例8中在甲、乙建立起协作信任关系时，有两个子博弈，分别用虚线框出，见下图：



且此时的博弈问题为完全且完美信息的动态博弈。

完全且完美信息动态博弈的求解

- 子博弈
  - 举例：
    - 例8中当甲、乙未建立起协作信任关系时，或正在谈判乙厂送交的每批零部件是否都要检验，则甲、乙间的博弈过程见下图。
      - 该图中轮到乙采取行动时，不知道甲厂到底是进行检验还是给予免检，因此在乙厂行动的结点处，不是单点信息集，因此该图中不能分解出子博弈。



      - 此时的博弈问题为完全但不完美信息的动态博弈。

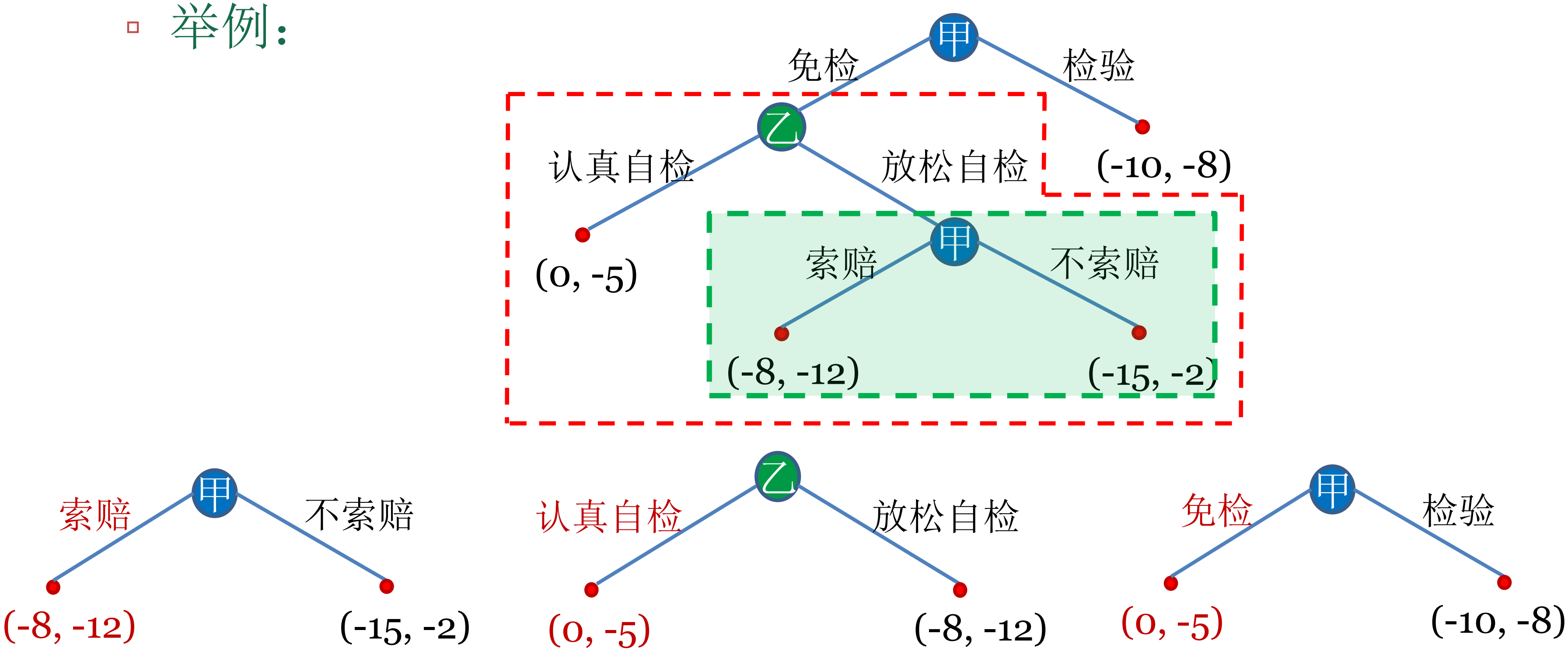
完全且完美信息动态博弈的求解

- 逆向递推求解法
  - 原理
    - 动态博弈求解的难点在于：每个局中人采取行动时，必须考虑后面局中人的行动和反应，以便使自己的总体策略为最优。
    - 由于在完全且完美信息动态博弈中，子博弈的起始结点包含了该结点之前博弈过程的全部信息，因此按照动态规划最优性原理，为使每个局中人的总体策略最优，则他在每个子博弈中的策略也必须最优，由此可从最后阶段的子博弈开始，采用逆向递推的方法求出动态博弈的最优解。

Haiyan Lu
Jiangnan University

完全且完美信息动态博弈的求解

- 逆向递推求解法
  - 举例：



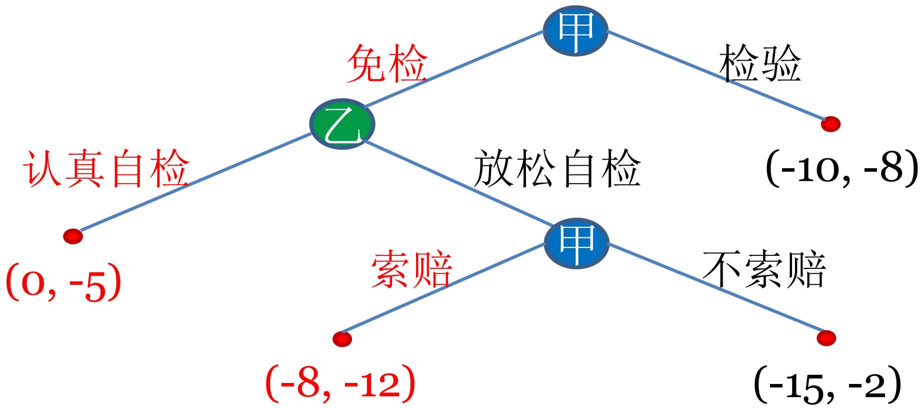
- 求解可得：甲厂的最优策略为免检—索赔(当乙厂放松自检时)，乙厂的最优策略为认真自检，双方的收益分别为0万元和-5万元。

Haiyan Lu
Jiangnan University

完全且完美信息动态博弈的求解

- 子博弈精炼纳什均衡(subgame perfect Nash equilibria)
  - 若动态博弈中各局中人的策略满足：
    - (1) 是动态博弈的纳什均衡，
    - (2) 在所有子博弈中均构成纳什均衡，

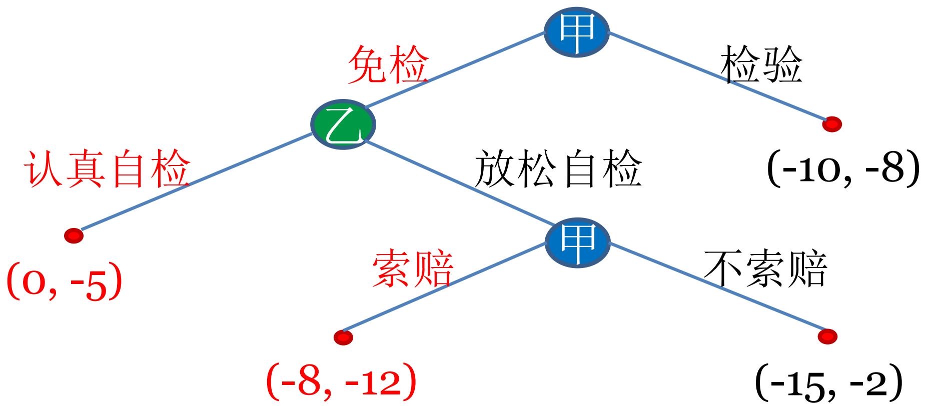
    则称上述策略为子博弈精炼纳什均衡。
- 备注
  - 子博弈精炼纳什均衡区别于完全信息静态博弈的纳什均衡。
    - 举例：(1)若将下图中的（完全且完美信息的）动态博弈作为静态博弈来处理，求其相应的纳什均衡解。



Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

完全且完美信息动态博弈的求解

- 子博弈精炼纳什均衡
  - 举例：



- 将上述博弈作为静态博弈处理时，
  - 乙厂的策略有认真自检和放松自检；
  - 甲厂的策略为检验和免检，在对乙厂给予免检时，针对乙厂的策略有：
    - (S, S)：无论乙厂是否认真自检均索赔
    - (NS, S)：乙厂认真自检时不索赔，放松自检时索赔
    - (S, NS)：乙厂认真自检时索赔，否则不索赔
    - (NS, NS)：无论乙厂是否认真自检均不索赔

完全且完美信息动态博弈的求解

- 子博弈精炼纳什均衡
  - 举例：
    - 按照上述分析，列出在静态博弈下双方的策略及收益矩阵：

甲厂	乙厂	
	认真自检	放松自检
检验	(-10, -8)	(-10, -8)
免检，(S, S)	(0, -5)	(-8, -12)
免检，(NS, S)	(0, -5)	(-8, -12)
免检，(S, NS)	(0, -5)	(-15, -2)
免检，(NS, NS)	(0, -5)	(-15, -2)

    - 用**画线法**求解，得到纳什均衡解为甲策略是免检-索赔（当乙厂放松自检时），乙策略为认真自检，双方的收益向量为(0, -5)，与前面用动态博弈进行的分析一致。

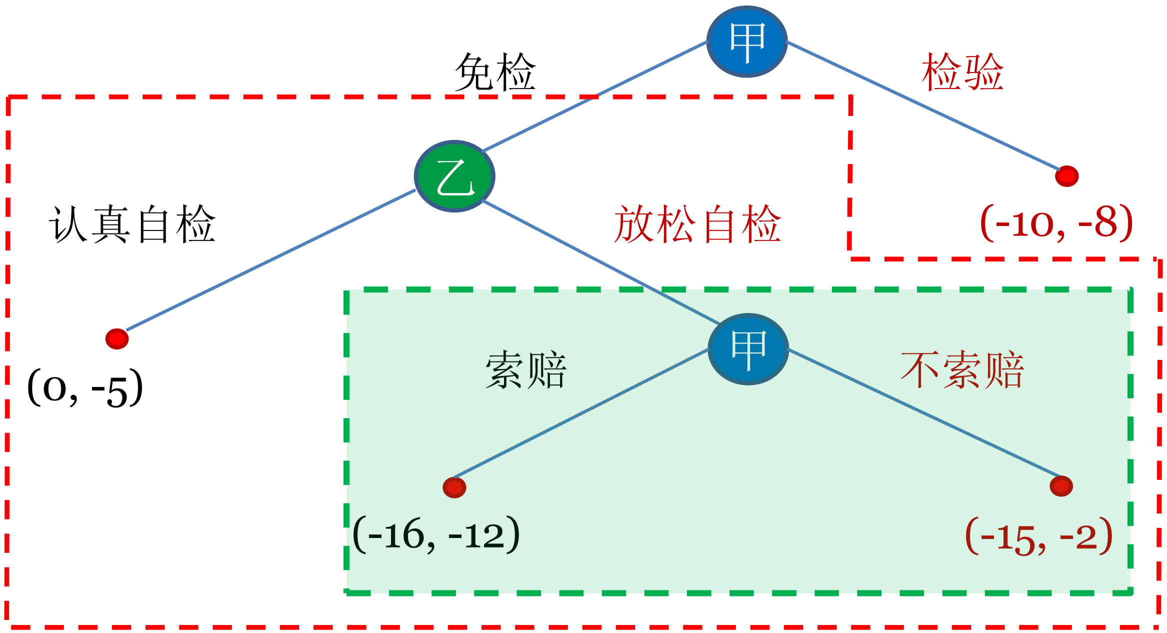
Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

完全且完美信息动态博弈的求解

- 子博弈精炼纳什均衡
  - 举例：(2)下图中所示博弈为索赔或威胁不可信时的（完全且完美信息的）动态博弈。

    1）若采用逆向递推法求解该动态博弈，可得甲的最优策略为检验。

    2）若将其作为静态博弈来处理，求其相应的纳什均衡解（见下页）。



Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

完全且完美信息动态博弈的求解

- 子博弈精炼纳什均衡
  - 举例：
    - 与上述分析类似，列出在静态博弈下双方的策略及收益矩阵：

甲厂	乙厂	
	认真自检	放松自检
检验	(-10, -8)	(-10, -8)
免检，(S, S)	(0, -5)	(-16, -12)
免检，(NS, S)	(0, -5)	(-16, -12)
免检，(S, NS)	(0, -5)	(-15, -2)
免检，(NS, NS)	(0, -5)	(-15, -2)

    - 用**画线法**求解，可知纳什均衡解为除了甲厂坚持检验的策略外，还有两个纳什均衡解，均为在对乙厂免检情况下，当乙厂放松自检时均进行索赔，双方的收益向量为(0, -5)，这与前面用动态博弈进行的分析不一致。
      - 原因：该情形静态博弈的纳什均衡中包含了一个当乙厂放松自检时就要索赔的**不可置信的威胁**。若把上表中甲厂的{免检，(S, S)}和{免检，(NS, S)}这两个含不可置信威胁的策略去掉，则纳什均衡解就只剩甲厂坚持检验一个，此时同动态博弈用子博弈逆向递推求解的结果一致。

完全且完美信息动态博弈的求解

- 子博弈精炼纳什均衡
  - 备注：
    - 子博弈精炼纳什均衡的条件实际上是将动态博弈中那些不保证实现的承诺和不可置信的威胁剔除掉，因为在每个子博弈中，每个局中人都考虑自己的最大利益，因此其策略在所有子博弈中均构成纳什均衡，自然就剔除了不保证实现的承诺和不可置信的威胁。

应用举例

- 例9 斯塔伯格(Stackelberg)博弈
  - 斯塔伯格博弈与例5中的古诺寡头竞争模型的各项假定基本相同，唯一的差别是在斯塔伯格模型中假定A、B两企业先后决策，A企业先决定产量q_1，再由B企业决定q_2。在这种情况下，要求确定双方各自的最优策略。
- 解：
  - 由例5，A、B两企业各自的收益为

$$u_1 = 9q_1 - q_1^2 - q_1 q_2$$
$$u_2 = 9q_2 - q_2^2 - q_1 q_2$$

  - 由于斯塔伯格博弈为动态博弈，企业B在企业A决定产量q_1后再决定自己的产量q_2，因此根据逆向递推的思想，先优化q_2，令

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = 9 - 2q_2 - q_1 = 0$$

得

$$q_2^* = \frac{1}{2}(9 - q_1)$$

应用举例

- (例9)解（续）：
  - 企业A要考虑企业B的决策反应，然后优化自己的产量q_1。因此将$q_2^* = \frac{1}{2}(9 - q_1)$代入$u_1$表达式，得到
  $$u_1 = 9q_1 - q_1^2 - q_1\left[\frac{1}{2}(9 - q_1)\right] = 4.5q_1 - \frac{1}{2}q_1^2$$
  - 令 $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 4.5 - q_1 = 0$，得$q_1^* = 4.5$，从而得到$q_2^* = 2.25$，$u_1^* = 10.125, u_2^* = 5.0625.$

- 备注
  - 与例5相比，例9中企业A的产量增加，而企业B的产量减少，两企业的收益情况也有类似变化。这是因为市场容量有限，且产品的价格和利润随着两企业总产量的增加而减少，因此先采取决策的企业可借先行动的有利条件设法多占市场，从而牟取较大收益。
  - 例9中的前提是双方局中人都是理性的。但在目前有些市场竞争中，在市场容量基本饱和的情况下，仍有很多企业涌入来争夺市场，造成产品价格和利润大幅下降，此类竞争已超出了理性的范围。

应用举例

- 例10 讨价还价模型
  - 甲、乙两人就如何分配100元的共同收益进行讨价还价。规则是：
    - 第一阶段：由甲提出分配方案，比如甲得x_1元，则乙得$100 - x_1$元，若乙同意，则博弈结束，否则进入第二阶段。
    - 第二阶段：由乙提出分配方案，比如甲得x_2元，则乙得$100 - x_2$元，若甲同意，则博弈结束，否则进入第三阶段。
    - 第三阶段：再由甲提出分配方案，如此循环进行，直到一方提出的方案被对方接受为止，博弈才结束。
  - 考虑到谈判的费用及货币的时间价值等因素，规定谈判每延长一个阶段，双方收益都有一个折扣因子，甲方为δ_1 (δ_1<1)，乙方为δ_2 (δ_1<1)，即下一阶段甲、乙双方1元的收入各相当于本阶段的δ_1元和δ_2元。
  - 要求确定当谈判阶段数为n时，双方能接受的分配方案。

应用举例

- (例10) 解：
  - 这是一个完全（且完美）信息动态博弈，阶段数n可以为有限值，也可以为无限。
  - 先考虑阶段数n为有限的情形，用逆向递推法求解。下表列出了谈判阶段数分别为n=2, 3, 4, 5时双方均能接受的第一阶段的分配计算公式以及当$\delta_1=0.98$、$\delta_2=0.97$时的计算结果（求解过程示例参见下页）：

n	谈判方	
	甲	乙
2	$100(1-\delta_2)$, 3	$100\delta_2$, 97
3	$100[1-\delta_2(1-\delta_1)]$, 98.06	$100\delta_2(1-\delta_1)$, 1.94
4	$100\{1-\delta_2[1-\delta_1(1-\delta_2)]\}$, 5.582	$100\delta_2[1-\delta_1(1-\delta_2)]$, 94.148
5	$100\{1-\delta_2\{1-\delta_1[1-\delta_2(1-\delta_1)]\}\}$, 96.177	$100\delta_2\{1-\delta_1[1-\delta_2(1-\delta_1)]\}$, 3.382

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

应用举例

- (例10) 解（续）：
  - 阶段数n为有限时求解过程示例：

阶段数n=2	谈判方	
	甲	乙
第1阶段（甲）	$100(1-\delta_2)$	$100\delta_2$
第2阶段（乙）	0	100

阶段数n=3	谈判方	
	甲	乙
第1阶段（甲）	$100[1-\delta_2(1-\delta_1)]$	$100\delta_2(1-\delta_1)$
第2阶段（乙）	$100\delta_1$	$100(1-\delta_1)$
第3阶段（甲）	100	0

应用举例

- (例10) 解（续）：
  - 从前面的表格可以看出：
    - 当谈判阶段数为奇数时，即最后一个阶段由甲提分配方案时，甲得到较大分配额；当谈判阶段数为偶数时，即最后一个阶段由乙提分配方案时，乙得到较大分配额。
    - 随着谈判阶段数的增加，甲、乙所得的收益之间的差距逐渐缩小。
    - 随着谈判阶段数的增加，甲、乙中耐心程度低（有较小折扣因子）的一方其收益的减小速度更快一些。

应用举例

- (例10) 解（续）：
  - 再考虑阶段数n为无限的情形（此时无法用逆推法求解）。
    - 结论：
      - 当$n \to \infty$时双方可接受的分配额，其中甲方为

$$x_1 = \frac{100(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}$$

当$\delta_1 = \delta_2 = \delta$时，上式可简化为

$$x_1 = \frac{100}{1+\delta}$$

上述公式称为Rubinstein公式。

证明过程见教材372-373页

- 应用：
  - 本例中，当谈判阶段数$n \to \infty$时，第一阶段双方可接受的分配方案为：

甲方所得为 $x_1 = \frac{100(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2} = 60.7287$元，乙方所得为$100 - x_1 = 39.2713.$

当$\delta_1 = \delta_2 = 0.98$时，有 $x_1 = 50.505$，$100 - x_1 = 49.495$；

当$\delta_1 = \delta_2 = 0.99$时，有 $x_1 = 50.25$，$100 - x_1 = 49.75$；

说明当折扣因子越接近1，或者两个折扣因子的差距越小时，甲、乙的分配所得就越接近。

应用举例

- 备注
  - 例10（讨价还价博弈）中δ_1 和δ_2的值在一定程度上反映了两名谈判者的耐心程度，耐心高的谈判者δ值较大，增加谈判阶段数时损失较小，；而δ值越小，每增加一个阶段该谈判者损失就越大，因而愿意接受较低的分配份额。
    - 比如，一名商贩出售每件商品的价格为300元，而保本价为200元，其中的差价100元为买卖双方的谈判空间。
      - 当买者希望很快谈妥、不愿耽误时间时，可能成交价在270元左右；
      - 但对耐心高的购买者，商贩可能不愿过多纠缠而影响其营业，或急于想把商品脱手时，成交价就可能在230左右。

不 完 全 信 息 静 态 博 弈

第4节

不完全信息静态博弈的例子及海萨尼转换

- 定义
  - 在一个静态博弈中，若至少有一个局中人不完全清楚其他某些局中人的收益函数，则称此类博弈为不完全信息的静态博弈。
- 举例
  - 在项目投标中，一个投标人不知道其他投标人的投标价；
  - 在市场竞争中，一个新进入者不知道原在位者的成本和赢利情况；
  - ……

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

不完全信息静态博弈的例子及海萨尼转换

- 例11 甲、乙两个电视机生产厂商都想抢占高清电视机市场。甲厂研发起步较迟，但技术力量相对强一些；乙厂起步早，若在某一关键环节取得突破将位居优势。
  - 甲厂有两种策略：一是加大投入(C)，二是维持正常进度(F)。
  - 乙厂也有两种策略：一是加快进度，力保领先(S)，二是不紧不慢，冷静应对(Y)。
  - 乙厂在关键环节的突破有可能性很大(L)，也可能性不大(NL)两种情况。乙厂心里知道，但甲厂不知道。

根据上述情况分别给出乙厂关键环节突破为很大(L)和不大(NL)两种情况下两厂博弈时的收益向量矩阵，分别见下面两个表格：

甲	乙	
	S	Y
C	(1, 3)	(0, 4)
F	(0, 4)	(1, 6)

情况突破为L

甲	乙	
	S	Y
C	(2, 3)	(3, 2)
F	(1, 4)	(2, 5)

情况突破为NL

不完全信息静态博弈的例子及海萨尼转换

- (例11)分析：
  - 本例中实际上包含两个博弈：表(a)中存在一个纳什均衡(F, Y)，表(b)中存在一个纳什均衡(C, S)。但由于甲厂不知道乙厂某项关键环节的突破情况，因而不知道自己应采取的策略；同样，乙厂也不知道自己正确的应对策略。

甲	乙	
	S	Y
C	(1, 3)	(0, 4)
F	(0, 4)	(1, 6)

(a)情况突破为L

甲	乙	
	S	Y
C	(2, 3)	(3, 2)
F	(1, 4)	(2, 5)

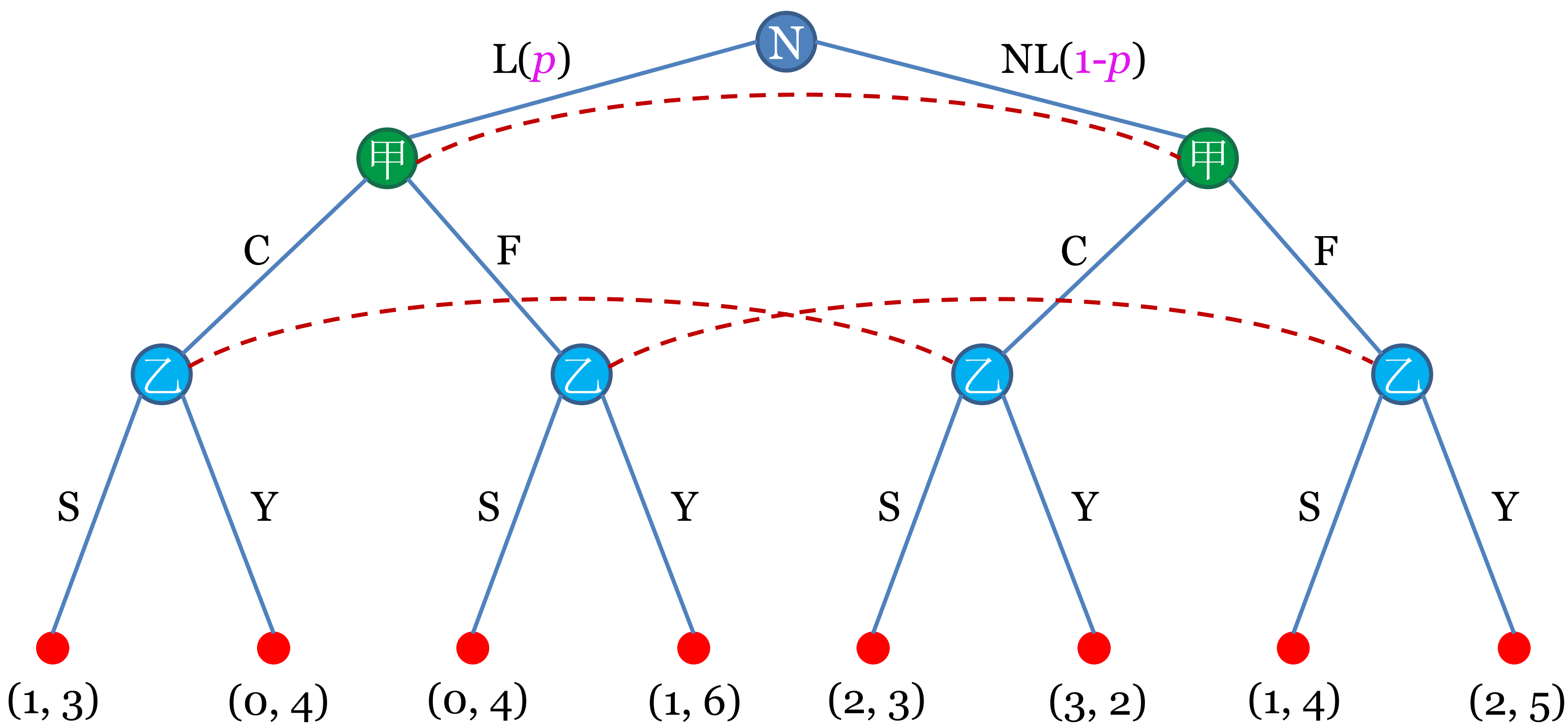
(b)情况突破为NL

  - 1967年海萨尼(Harsanyi)提出了处理上述不完全信息的方法，称为**海萨尼转换**。
  - 用海萨尼转换处理本例：引入一个虚拟的局中人“自然”(N)，并构造甲厂、乙厂、自然的三人博弈，其中自然先决定乙厂的类型是L(概率为p)还是NL (概率为1-p)，然后再将博弈过程动态化，即先由甲厂、然后乙厂采取行动。见下页的博弈树图。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

不完全信息静态博弈的例子及海萨尼转换

- (例11)分析：
  - 通过**海萨尼转换**，将本例中的不完全信息静态博弈问题转换成一个完全但不完美信息的动态博弈问题。但是，由于概率p是随机的，且自然对乙厂类型的选择不计量效益值，因此上述问题仍无法用前面讲过的方法来求解。



Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

贝叶斯博弈及贝叶斯纳什均衡

- 贝叶斯博弈
  - 贝叶斯博弈(the static Bayesian game)是不完全信息静态博弈的一种建模方式，也是不完全信息静态博弈的标准式描述。
  - 贝叶斯博弈包含五个要素：
    - 局中人：用i表示，i=1,…,n.
    - 局中人类型集$T_1, \ldots, T_n$. T_i是局中人i的类型集, t_i是自然对局中人类型的一个选择, $t_i \in T_i$; $t = (t_1, \ldots, t_n)$是自然对各局中人类型选择的一个组合.
    - 局中人i 对其他局中人类型的判断 $p_i(t_{-i}|t_i)$:

$$p_i(t_{-i}|t_i) = \frac{p(t_{-i},t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(t_{-i},t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i},t_i)} \qquad \text{(贝叶斯公式)}$$

      其中t_{-i}是除局中人i外其他所有局中人类型的简写。
    - 局中人i的行动和行动集：行动是局中人的一个单纯步骤，策略一般是指行动的组合，有时也用策略来表示行动。由于贝叶斯博弈中局中人的行动是跟其类型相关的，故用$a_i(t_i)$表示局中人i的一个行动，$A_i(t_i)$表示局中人i的行动集。
    - 局中人i的收益函数 $u_i(a_1(t_1), \ldots, a_n(t_n);\ t_i), i = 1, \ldots, n$.

贝叶斯博弈及贝叶斯纳什均衡

- 贝叶斯博弈
  - 举例：将例11用贝叶斯博弈描述。
    - 局中人为甲厂和乙厂；
    - 甲厂只有一种类型$T_{甲}$，乙厂有两种类型$T_{乙} = \{L, NL\}$
    - 甲厂、乙厂的类型之间相互独立，有：

$$p\left(T_{甲}\middle|T_{乙}\right) = 1, p\left(L\middle|T_{甲}\right) = p(L), p\left(NL\middle|T_{甲}\right) = p(NL)$$

    - 甲厂的行动集也即他的策略集为{C, F}; **乙厂的行动集**为{S, Y}，其**策略集**包含四个策略：
      - (S,S)：不管自己类型为L或NL，均采取行动S
      - (S,Y)：当类型为L是采取S，当类型为NL时采取Y
      - (Y,S)：当类型为L是采取Y，当类型为NL时采取S
      - (Y,Y)：不管自己类型为L或NL，均采取行动Y

贝叶斯博弈及贝叶斯纳什均衡

- 贝叶斯博弈纳什均衡

设$E(u_i)$表示局中人i选择行动a_i时的期望效用，有

$$E(u_i) = \sum_{t_{-i}} p_i(t_{-i}|t_i) u_i(a_i, a_{-i}(t_{-i}); t_i)$$

纯策略贝叶斯纳什均衡是一个行动组合$(a_1^*(t_1), \dots, a_n^*(t_n))$，在该组合下，每个局中人在给定自己类型$t_i$和其他局中人的与类型相关的行动$a_{-i}(t_{-i})$的情况下最大化自己的期望效用。

贝叶斯博弈及贝叶斯纳什均衡

- 贝叶斯博弈纳什均衡
  - 举例：对例11求贝叶斯纳什均衡解。
    - 画出下表，表中每格中的数字“a, (b,c)”的含义为：
      - a表示甲、乙两厂分别采用该格对应策略时甲厂的期望收益
      - (b,c)表示对应于该格的甲、乙厂策略，乙厂分别为L和NL类型时的期望收益。

甲	乙			
	(S,S)	(S,Y)	(Y,S)	(Y,Y)
C	2-p，(3, 3)	3-2p，(3, 2)	2-2p，(4, 3)	3-3p，(4, 2)
F	1-p，(4, 4)	2-2p，(4, 5)	1，(6, 4)	2-p，(6, 5)

    - 对于乙厂，(S,S)劣于(Y,S)，(S,Y)劣于(Y,Y)，**删去劣策略**后，得到下页的表。

贝叶斯博弈及贝叶斯纳什均衡

- 贝叶斯博弈纳什均衡
  - 举例：对例11求贝叶斯纳什均衡解。

甲	乙	
	(Y,S)	(Y,Y)
C	2-2p，(4, 3)	3-3p，(4, 2)
F	1，(6, 4)	2-p，(6, 5)

- 上表中，
  - 当$p<1/2$时，(C, (Y,S))是一个纳什均衡；
  - 当$p>1/2$时，(F, (Y,Y))是一个纳什均衡.
- 因此，当$p\leq 1/2$时，甲厂的最优策略为C，乙厂的最优策略为当类型为L时选择Y，当类型为NL时选择S；当$p>1/2$时，甲厂的最优策略为F，乙厂的最优策略为当类型为L或NL时均选择Y。

不完全信息情况下的古诺博弈模型

- 例12 有两个生产相同产品的企业A和B，其产量分别为q_1 和q_2，市场的总供应量为$Q = q_1 + q_2$，市场出清价为$P(Q) = 12 - Q$。设两企业产品均无固定成本，企业A生产q_1件产品总成本为$C_1(q_1) = 3q_1$，企业B因缺乏生产经验，生产q_2件产品总成本可能为$C_H(q_2)$，概率为p，也可能为$C_L(q_2)$，概率为$1 - p$，$C_H > C_L$，企业B知道自己生产成本类型，但企业A不知道。试确定A、B两企业最优的产量决策。
- 解：

$q_2^*(C_H)$ 应满足 $\max\{[(12 - q_1^* - q_2) - C_H]q_2\}$

$q_2^*(C_L)$ 应满足 $\max\{[(12 - q_1^* - q_2) - C_L]q_2\}$

q_1^*应满足$\max\{p\left[\left(12 - q_1 \quad - q_2^*(C_H)\right) - C_1\right]q_1 + (1-p)\left[\left(12 - q_1 \quad -\right.\right.$

不完全信息情况下的古诺博弈模型

- (例12) 解（续）：
  - 比如，设$C_H = 3.5$，$C_L = 2.5$，$p = 2/3$，则有

$$q_1^* = 3.056$$
$$q_2^*(C_H) = 2.722$$
$$q_2^*(C_L) = 3.222$$

将上述结果与例5中完全信息时的古诺模型比较，有

$$q_2^*(C_H) < q_2^*, \quad q_2^*(C_L) > q_2^*$$

这说明当企业成本较高时，产量自然低一些，成本较低时产量相对大一些。

另外，由于企业B的每件产品的期望成本为 $\frac{2}{3} \times 3.5 + \frac{1}{3} \times 2.5 = 3.166$，高于例5中相应的成本3，因而这里$q_1^*$要高于例5中相应的数值。

不完全信息动态博弈

第5节

不完全信息动态博弈

- 概述
  - 不完全信息是指博弈中至少有一个局中人不完全清楚其他某些局中人的收益函数。
  - 动态博弈是指局中人的行动有先后之分，后行动者可以观察到先行动者的行动，并决定或修改自己的行动。
  - 类似于不完全信息静态博弈可转换为完全但不完美信息动态博弈来进行分析，所有的不完全信息动态博弈都可以转换成完全但不完美信息动态博弈来进行分析。
    - 正因为如此，我们常把“不完全信息动态博弈”与“不完美信息动态博弈”混同使用。

不完全信息动态博弈的表示

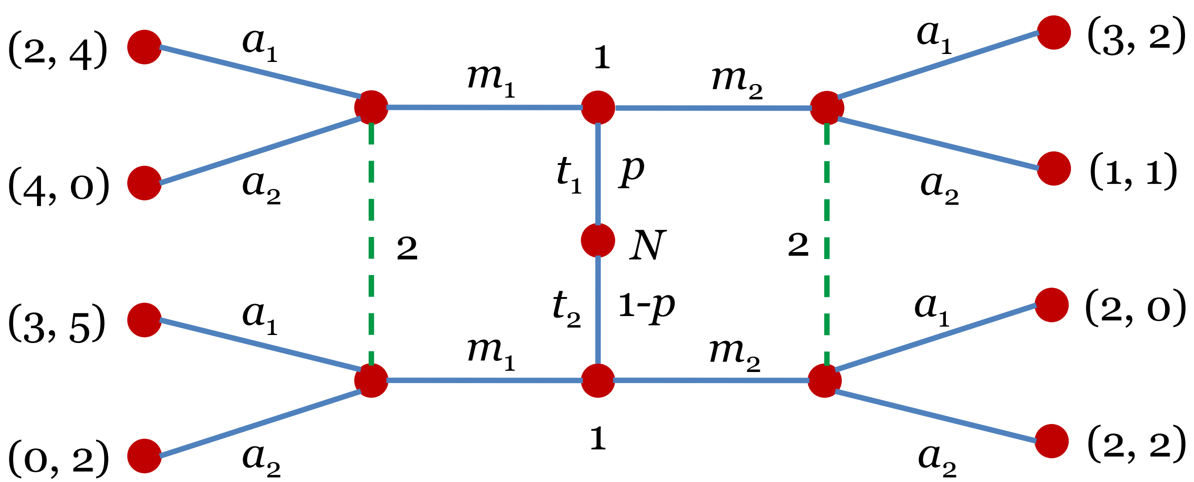
- 用博弈树表示完全且完美信息的动态博弈，其中博弈树上的每个节点就是一个独立的决策节点，表示局中人在该时点对此前的博弈过程有完全的了解。
- 在不完全信息的动态博弈中，“自然”首先选择局中人的类型，相应的局中人知道自己的类型，但其他局中人不知道；在自然的选择之后，局中人开始序贯行动，后行动者能观察到先行动者的行动，但无法观测到先行动者的类型，从而产生不完美信息，因此，我们在博弈树上用多点信息集来反映。

不完全信息动态博弈的过程

- 在不完全信息动态博弈中，“自然”首先选择局中人的类型，相应的局中人知道自己的类型，其他局中人不知道；在自然选择之后，局中人开始行动，局中人的行动有先后，后行动者能观察到先行动者的行动，但不能观测到先行动者的类型。
- 但是，局中人的行动是与类型相关的（或称是依赖于类型的）。每个局中人的行动都传递着有关自己类型的信息，后行动者可以通过观察先行动者所选择的行动来推断其类型或修正对其类型的先验信息（先验概率），然后选择自己的最优行动；先行动者理性预测到自己的行动将被后行动者利用，就会设法选择传递对自己有利的信息，避免传递对自己不利的信息。
- 因此，该博弈过程的实质不仅是局中人选择行动的过程，也是局中人<u>**不断修正信念**</u>的过程。

不完全信息动态博弈的过程

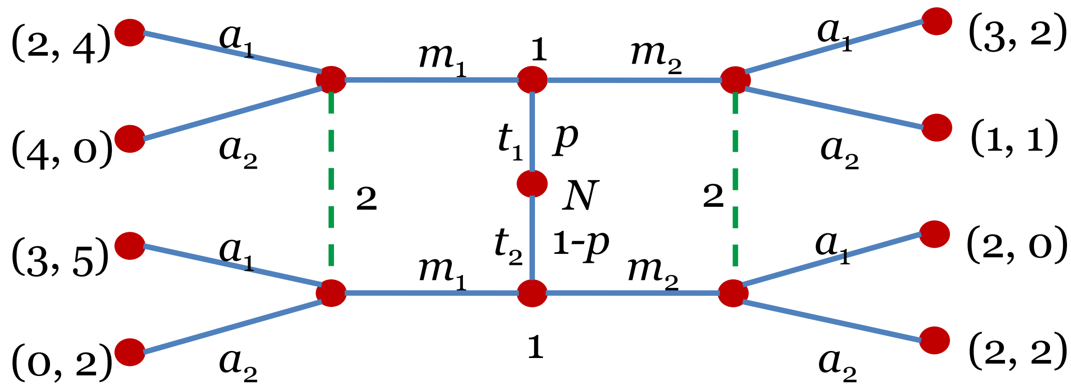
- 信号博弈
  - 信号博弈是不完全信息动态博弈中常用而简单的一类博弈。信号博弈实际上是不完全信息情况下的Stackelberg博弈。
  - 举例
    - 下图中有两个局中人i=1,2，局中人1为信号发送者，局中人2为信号接收者。局中人1有两个类型t_1和t_2，局中人2有一个类型。局中人1的信号集为$M=\{m_1, m_2\}$，局中人2的行动集为$A=\{a_1, a_2\}$ 。各项行动端点的数字(c, d)分别表明相应策略组合下局中人1、2的收益向量。(这里p=0.5)



Haiyan Lu
Jiangnan University 6/10/2020

不完全信息动态博弈的过程

- 信号博弈
  - 举例



- 博弈过程如下：

(1)自然N首先选择局中人1的类型为t_1或t_2，局中人1自己知道，局中人2不知道，但局中人2有对局中人1的类型的推断（先验概率）；

(2)局中人1观察到自己的类型t_k (k=1,2)后，从信号空间M中发送一个信号m_j (j=1,2)；

(2)局中人2接收到信号m_j后，先是依据贝叶斯法则修正自己对局中人1的类型的概率估计，有$\tilde{p}=\tilde{p}(t_k|m_j)$(后验概率)，然后计算、比较自己采取行动$a_1$或$a_2$时的期望收益，确定使自己收益最大的行动$a^*(m_j)$。期望收益的计算公式为

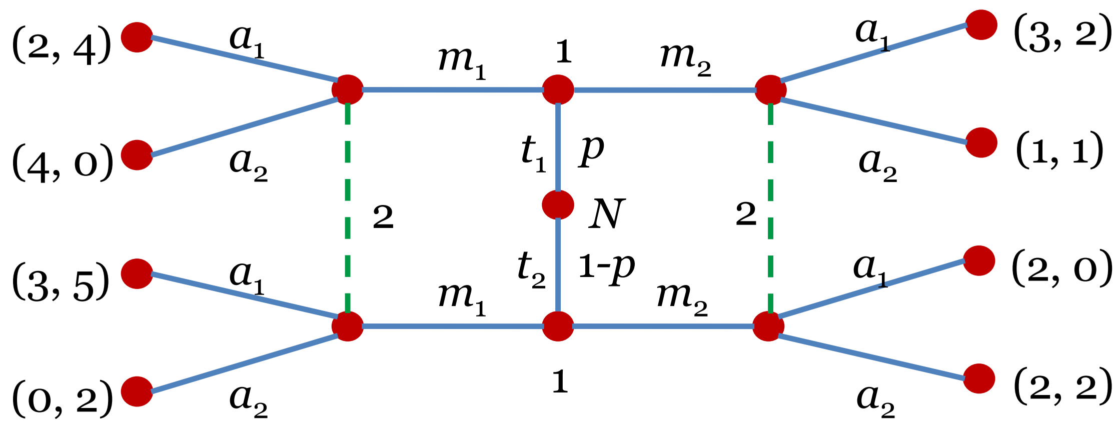
$$\sum_{t_k}\tilde{p}(t_k|m_j)u_2(t_k,m_j,a_l)\ \ (l=1,2)$$

(4) 局中人1知道自己发送的信号将被局中人2利用，因此需要考虑发送对自己最有利，即对自己收益大的信号$m^*(t_k)$，方法是按下式计算得出：

$$u_1\left(t_k,m_j,a^*(m_j)\right)\ \ (k=1,2;j=1,2)$$

不完全信息动态博弈的过程

- 信号博弈
  - 举例



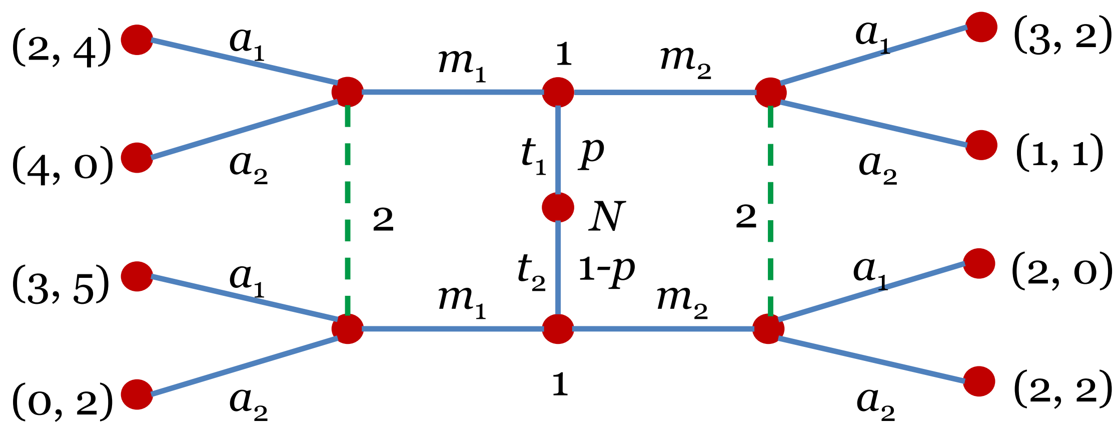
- 上述信号博弈中，局中人1有四种纯策略：
  - (m_1, m_1)：不管自然选择的类型是t_1还是t_2，均发送信号m_1；
  - (m_2, m_2)：不管自然选择的类型是t_1还是t_2，均发送信号m_2；
  - (m_1, m_2)：自然选择类型t_1时发送信号m_1，自然选择类型t_2时发送信号m_2；
  - (m_2, m_1)：自然选择类型t_1时发送信号m_2，自然选择类型t_2时发送信号m_1.

其中，(m_1, m_1)和(m_2, m_2)称为混同策略，指信号发送者在不同类型下发出相同的信号，因而信号接收者无法从观测到的信号中得到新的信息，也就无法对先验概率进行修正；(m_1, m_2)和(m_2, m_1)称为分离策略，指信号发送者针对不同的类型选择不同的信号，接收者可以通过所观测到的信号准确地判断出发送者的类型。

Haiyan Lu
Jiangnan University

不完全信息动态博弈的过程

- 信号博弈
  - 举例



- 上述信号博弈中，局中人2有四种纯策略：
  - (a_1, a_1)：不管局中人1发送信号是m_1还是m_2，均采取行动a_1；
  - (a_2, a_2)：不管局中人1发送信号是m_1还是m_2，均采取行动a_2；
  - (a_1, a_2)：接收到信号m_1时采取行动号a_1，接收到信号m_2时采取行动a_2；
  - (a_2, a_1)：接收到信号m_1时采取行动号a_1，接收到信号m_2时采取行动a_2.

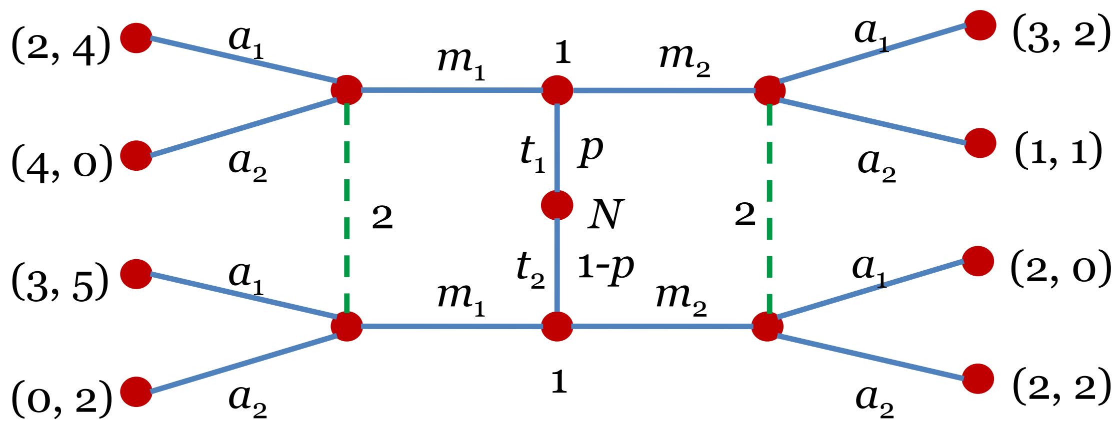
精炼贝叶斯纳什均衡

- 博弈问题的求解
  - 找到一个对各局中人都有利或都能接受的均衡解。到达均衡解时，只要其他局中人不改变自己的策略，任何局中人单独改变自己的策略都会给自己带来损失。
    - 完全信息静态博弈：纳什均衡
    - 完全（且完美）信息动态博弈：子博弈精炼纳什均衡
    - 不完全信息静态博弈：贝叶斯纳什均衡
    - 不完全信息动态博弈：精炼贝叶斯纳什均衡
- 精炼贝叶斯纳什均衡解
  - 要求：除局中人1、2按上述博弈过程的(1)-(4)条优化自己的策略外，还应分别就处于均衡与非均衡策略信息集两种情况分别对局中人2符合最优行动选择的后验概率进行均衡推断。
    - 对一个给定的不完全信息动态博弈，根据均衡策略进行时可以到达的信息集称为处于均衡策略路线上的信息集，否则称为处于非均衡策略路线是上的信息集。

Haiyan Lu
Jiangnan University

信号博弈的求解

- 举例



  - 分别就局中人1的4种策略讨论精炼贝叶斯纳什均衡的求解：

1、混同策略(m_1, m_1)：

此时，局中人2对局中人1的类型估计的后验概率为：

$$\tilde{p}(t_1|m_1) = p(t_1) = 0.5,\ \tilde{p}(t_2|m_1) = p(t_2) = 0.5$$

$$a^*(m_1) = arg \max_i[\tilde{p}(t_1|m_1)u_2(t_1, m_1, a_i) + \tilde{p}(t_2|m_1)u_2(t_2, m_1, a_i)]$$

$$= arg \max_i[0.5 \times 4 + 0.5 \times 5, 0.5 \times 0 + 0.5 \times 2] = arg \max_i[4.5, 1] = a_1$$

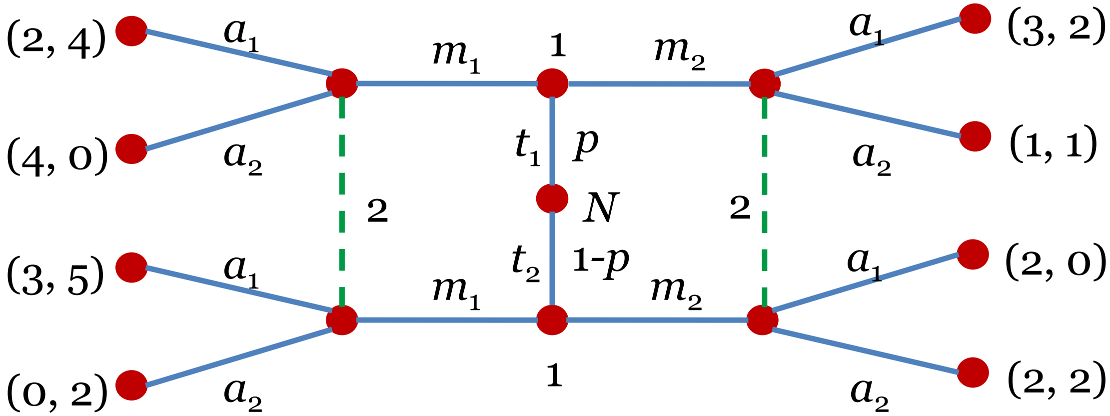
$$a^*(m_2)$$

$$= arg \max_i[0.5 \times 2 + 0.5 \times 0, 0.5 \times 1 + 0.5 \times 2] = arg \max_i[1, 1.5] = a_2$$

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

信号博弈的求解

- 举例



1、混同策略(m_1, m_1):

在推测到局中人2分别对信号m_1和m_2的所采取的最优行动后，局中人1回过头来考虑发送对自己有利的信号，由于

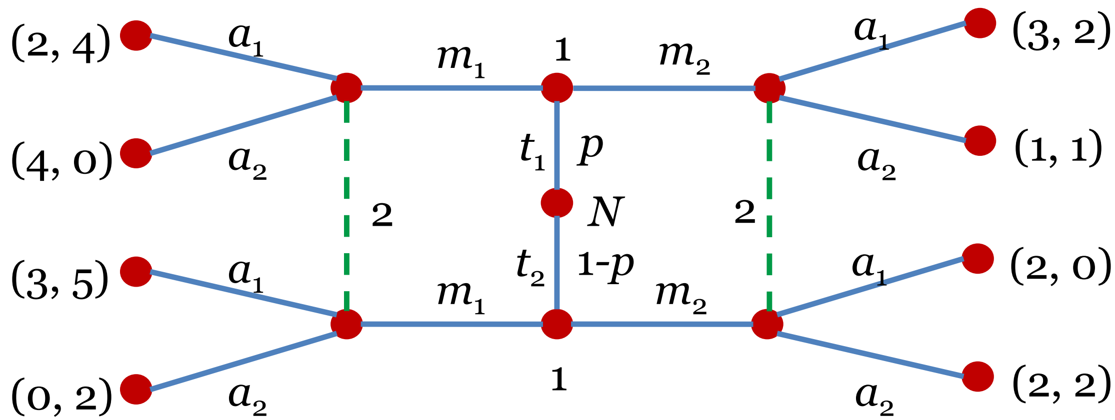
$$u_1\left(t_1, m_1, a^*(m_1)\right) = 2 > u_1\left(t_1, m_2, a^*(m_2)\right) = 1,$$

$$u_1\left(t_2, m_1, a^*(m_1)\right) = 3 > u_1\left(t_2, m_2, a^*(m_2)\right) = 2$$

因此，(m_1, m_1)是局中人1的最优策略，(a_1, a_2)是局中人2的最优策略。

信号博弈的求解

- 举例



1、混同策略(m_1, m_1):

下面还需要考察局中人2在对应的的信息集m_2中的推断，以及给定这一推断时选择a_2是否为最优？

设推断$\tilde{q} = \tilde{p}(t_1|m_2), 1 - \tilde{q} = \tilde{p}(t_2|m_2)$，则要使得选择$a_2$为最优，须满足： $\tilde{q} \times 1 + (1 - \tilde{q}) \times 2 = 2 - \tilde{q} \geq \tilde{q} \times 2 + (1 - \tilde{q}) \times 0 = 2\tilde{q}$

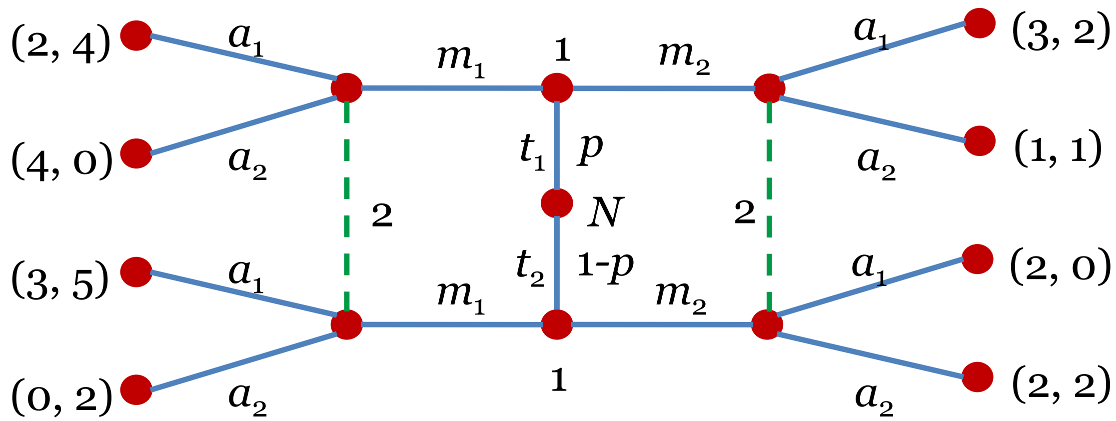
解得：$\tilde{q} \leq 2/3$

综上分析，得到：$[((m_1, m_1), (a_1, a_2)), p = 0.5, q \leq 2/3]$是该信号博弈的一个精炼贝叶斯纳什均衡。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

信号博弈的求解

- 举例



2、混同策略(m_2, m_2):

此时，局中人2对局中人1的类型估计的后验概率为:

$\tilde{p}(t_1|m_2) = p(t_1) = 0.5,\ \tilde{p}(t_2|m_2) = p(t_2) = 0.5$

$a^*(m_2) = arg\max_i[\tilde{p}(t_1|m_2)u_2(t_1, m_2, a_i) + \tilde{p}(t_2|m_2)u_2(t_2, m_2, a_i)]$

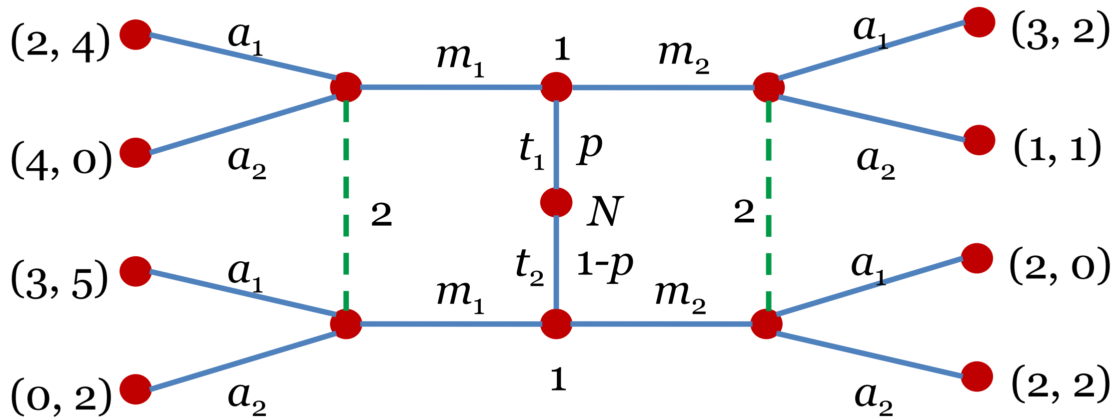
$= arg\max_i[0.5 \times 2 + 0.5 \times 0, 0.5 \times 1 + 0.5 \times 2] = arg\max_i[1,1.5] = a_2$

$a^*(m_1)$

$= arg\max_i[0.5 \times 4 + 0.5 \times 5, 0.5 \times 0 + 0.5 \times 2] = arg\max_i[4.5, 1] = a_1$

信号博弈的求解

- 举例



2、混同策略(m_2, m_2):

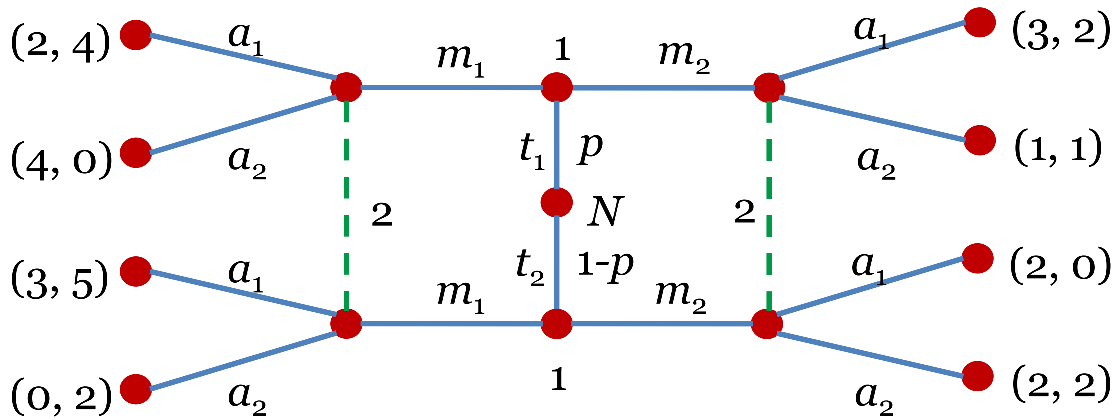
在推测到局中人2分别对信号m_1和m_2的所采取的最优行动后，局中人1回过头来考虑发送对自己有利的信号，由于

$$u_1\big(t_1, m_2, a^*(m_2)\big) = 1 < u_1\big(t_1, m_1, a^*(m_1)\big) = 2$$

表明类型为t_1的局中人1不会选择发送信号m_2，因此，(m_2, m_2)不能构成局中人1的最优策略。

信号博弈的求解

- 举例



3、分离策略(m_1, m_2):

此时，局中人2对局中人1的类型估计的后验概率为:

$\tilde{p}(t_1|m_1) = 1,\ \tilde{p}(t_2|m_1) = 0$；$\tilde{p}(t_1|m_2) = 0, \tilde{p}(t_2|m_2) = 1$

$a^*(m_1) = arg\max_i[\tilde{p}(t_1|m_1)u_2(t_1, m_1, a_i) + \tilde{p}(t_2|m_1)u_2(t_2, m_1, a_i)]$

$= arg\max_i[1 \times 4 + 0 \times 5, 1 \times 0 + 0 \times 2] = arg\max_i[4,0] = a_1$

$a^*(m_2) = arg\max_i[0 \times 2 + 1 \times 0, 0 \times 1 + 1 \times 2] = arg\max_i[0, 2] = a_2$

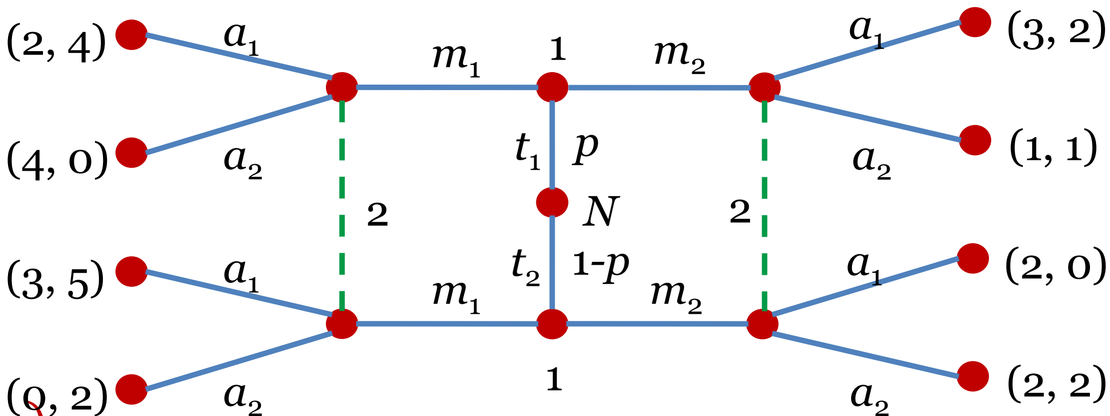
这时对局中人1有：$u_1\big(t_2, m_2, a^*(m_2)\big) = 2 < u_1\big(t_2, m_1, a^*(m_1)\big) = 3$

因此，(m_1, m_2)不能构成局中人1的最优策略

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

信号博弈的求解

- 举例



4、分离策略(m_2, m_1):

此时，局中人2对局中人1的类型估计的后验概率为:

$\tilde{p}(t_1|m_1) = 0$, $\tilde{p}(t_2|m_1) = 1$； $\tilde{p}(t_1|m_2) = 1, \tilde{p}(t_2|m_2) = 0$

$a^*(m_1) = arg\max_i[\tilde{p}(t_1|m_1)u_2(t_1, m_1, a_i) + \tilde{p}(t_2|m_1)u_2(t_2, m_1, a_i)]$

$= arg\max_i[0 \times 4 + 1 \times 5, 0 \times 0 + 1 \times 2] = arg\max_i[5,2] = a_1$

$a^*(m_2) = arg\max_i[1 \times 2 + 0 \times 0, 1 \times 1 + 0 \times 2] = arg\max_i[2, 1] = a_1$

这时对局中人1有: $u_1\big(t_1, m_2, a^*(m_2)\big) = 3 > u_1\big(t_1, m_1, a^*(m_1)\big) = 2$

$u_1\big(t_2, m_1, a^*(m_1)\big) = 3 > u_1\big(t_2, m_2, a^*(m_2)\big) = 2$

因此，$[((m_2, m_1), (a_1, a_1)), p = 0, q = 1]$是也该信号博弈的一个精炼贝叶斯纳什均衡。

冲 突 分 析 简 介

第6节

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

冲突分析

- 概述
  - 冲突分析(conflict analysis)是在博弈论基础上发展起来的，也是用来研究具有竞争或对抗性质的问题的模型。
    - 博弈论从坏处着眼，努力争取好的结果，使得博弈各方达到一个稳定的局势。
    - 冲突分析也是各局中人从朝着有利于自己的方向调整策略，最后达到对各局中人而言的全局稳定结局。
  - 由于博弈论建模在确定策略时比较复杂，特别由于在支付函数量化上存在的困难，限制了它的实际应用。
    - 费舍尔(Fraser N. M)和希普尔(Hipel K. W)在前人研究的基础上，与1984年出版了《Conflict Analysis—Models and Resolutions》一书，较为系统地总结并提出了冲突分析的理论、模型和方法。

冲突分析的模型

- 冲突分析模型的要素
  - 局中人
    - 指参与冲突的各方；可以是个人，也可以是集体；局中人至少有两人以上。
  - 选项
    - 各局中人在冲突事件中所采取的某种态度或行动称为选项；对某个具体行动可以选（用1表示）或不选（用0表示）。
  - 策略与可行策略
    - 某个局中人的选项的组合称为策略。
    - 由于某些选项之间互不相容，不能包含在同一策略中，因此对不含有互不相容选项的策略称为可行策略。

Haiyan Lu 6/10/2020
Jiangnan University

冲突分析的模型

- 冲突分析模型的要素
  - 结局与可行结局
    - 各局中人分别采取某一策略时形成的状态称为结局。
    - 各局中人的策略之间也可能存在不相容性，主要为逻辑推理上的不合理，因此称不含有不相容策略的结局称为可行结局。
  - 偏好向量
    - 指各局中人根据自己的价值观，对各可行结局的优劣排序所构成的数组。
  - 时间点
    - 冲突是一个动态现象，随着冲突的进程，局中人将变换自己的选项和偏好向量。冲突分析的建模是针对某一特定时间点进行的，当局中人有可能变换选项或偏好的时间点时应分别分析建模，进行动态分析。

冲突分析模型的表示

- 冲突分析的模型的表格形式
  - 举例

局中人	选项	结局																
A	a_1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	$(\times 2^0)$
	a_2	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	$(\times 2^1)$
B	b_1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	$(\times 2^2)$
	b_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	$(\times 2^3)$
十进制数		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	

- 上述表格中未排除不可行策略和不可行结局。
- 表中结局的排列是按十进制数，从左到右由小到大排列。
- 在上表中剔除掉不可行结局，再分别列出局中人各自的偏好向量，则得到用表格形式表示的冲突分析模型。

稳定性分析

- 稳定性分析的目的
  - 找出对各局中人而言的全局稳定结局。
  - 分析过程及主要概念(对只有两个局中人时的情形)
    - (1)某局中人的某一结局存在单方面改进(Unilateral Improvement, UI)
      - 在对方策略不变的条件下，局中人通过单方面改变自己的策略而使解决得到改善，称为单方面改进，简记为UI。
    - (2)合理性稳定结局(rational stable)
      - 在对方策略给定条件下，若局中人i所选策略形成的结局q对他来讲已是最好的（即不存在对结局q的单方面改进），则称结局q为局中人i的合理性稳定结局，简记为r。

稳定性分析

- 分析过程及主要概念(对只有两个局中人时的情形)
  - (3)相继惩罚性稳定结局 (sequentially sanctioned stable)
    - 若局中人i的某个结局q存在UI至结局q'，而对于局中人j，结局q'可UI至结局q''，且结局q''对局中人i来讲劣于q，则称对结局q的单方面改进存在一个相继性惩罚。
    - 这种相继性惩罚将阻止局中人i从结局q单方面改进至结局q'。
    - 若对结局q的所有可能的单方面改进均存在相继性惩罚，则结局q对局中人i而言是相继惩罚性稳定结局，简记为s。
  - (4)不稳定结局(unstable)
    - 若结局q对局中人i而言存在UI，但又不是相继惩罚性稳定结局，则称结局q为局中人i的一个不稳定结局，简记为u。

Haiyan Lu
Jiangnan University

稳定性分析

- 分析过程及主要概念(对只有两个局中人时的情形)
  - (5)同时惩罚性稳定结局 (simultaneously sanctioned stable)
    - 若结局q对局中人i和j都属不稳定结局，双方同时进行单方面改进，局中人i将结局q UI至a_i，局中人j将结局q UI至b_j，同时单方面改进后得到的结局为p，则可表示为： $p= a_i + b_j -q$
    - 若结局p对局中人i而言劣于结局q，则称i作出至a_i的单方面改进受到同时性惩罚。
    - 若局中人i从结局q出发的所有单方面改进均受到同时性惩罚，则称结局q对局中人i来讲属同时惩罚性稳定结局，简记为$\bar{u}$。
  - (6)全局稳定结局(equilibrium stable)
    - 若结局q对局中人i和j而言都属稳定性结局（可以为r , s或$\bar{u}$ ），则称该结局为全局稳定结局，简记为E。
    - 任何冲突分析模型至少存在一个全局稳定结局。

应用举例

- 劳资冲突分析
  - 国外某企业发生一起劳资冲突，其原因是资方忽视工人的劳动安全保护，并且不严格履行有关工资的合同协议。
  - 工人派代表同资方交涉，考虑到的行动选项有两个：(1)罢工以示抗议（简称罢工）；(2)要求加薪和改善劳动条件（简称加薪）。
  - 资方也有两个行动选项：(1)答应工人提出的要求（简称妥协）；(2)采取强硬手段，解雇领头的工人（简称解雇）。
  - 分析的时间确定在交涉谈判处于僵持状态、冲突会随时爆发的时刻。

应用举例

- 劳资冲突分析
  - 求解：
    - 工人方选项的4个组合均为可行策略，而资方的可行策略只有3个（因为资方的两个选项不相容）。
    - 在劳资双方采取不同策略组合而成的4×3=12个状态中，其中工人方未罢工、未提出加薪要求，而资方就解雇工人这个结局在逻辑上讲不通，因此该结局为不可行结局。将该结局删除，得到如下页表格中所示的11个可行结局。
    - 经分析，得到工人方的偏好向量P_1和资方的偏好向量P_2，也均列于下表中，得到表格形式的冲突分析模型。

应用举例

- 劳资冲突分析
  - 求解：
    - 下表即为此例的表格形式的冲突分析模型：

局中人	选项	结局										
工人方	罢工	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
	加薪	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
资方	妥协	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
	解雇	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
十进制数		0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11
工人方偏好向量		4	6	5	7	2	1	3	0	9	10	11
资方偏好向量		0	6	5	4	7	2	1	3	10	9	11

Haiyan Lu
Jiangnan University

应用举例

- 劳资冲突分析
  - 求解：
    - 稳定性分析的表格形式见下表：

		E	*E*									
		r	*s*	*u*	*u*	*r*	*u*	*u*	*u*	*r*	*u*	*u*
工人方	偏好向量	4	6	5	7	2	1	3	0	9	10	11
	单方面改进		4	4	4		2	2	2		9	9
				6	6			1	1			10
					5				3			
		r	*r*	*r*	*s*	*r*	*u*	*u*	*u*	*u*	*u*	*u*
资方	偏好向量	0	6	5	4	7	2	1	3	10	9	11
	单方面改进				0		6	5	7	6	5	7
										2	1	3