

# 动态规划

## 第八章

# 动态规划的最优性原理 与最优性定理

## 第3节

# 动态规划的最优性原理

- 理论发展历程
  - 20世纪50年代, **Richard Bellman** 等人提出了**最优性原理(Principle of Optimality)**作为动态规划的理论基础。
    - **最优性原理**: “作为整个过程的最优策略具有这样的性质: 即无论过去的状态和决策如何, 对前面的决策所形成的状态而言, 余下的诸决策必定构成最优策略”。简而言之, **一个最优策略的子策略总是最优的。**
    - Bellman's statement of the **Principle of Optimality** is that “an optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.” [An optimal solution must contain optimal (partial) solutions.]

# 动态规划的最优性原理

- 理论发展历程

- 随着动态规划研究的深入，人们逐渐认识到：
  - 最优性原理**不是对任何决策过程都普遍成立的。
  - 最优性原理与动态规划基本方程并非无条件等价，两者之间不存在确定的蕴含关系。
  - 动态规划基本方程**在动态规划理论和方法中起着非常重要的作用。而反映动态规划基本方程的是**最优性定理**，它是策略最优性的**充分必要条件**；而**最优性原理**仅仅是策略最优性的**必要条件**，它是最优性定理的推论。
  - 求解动态规划最优策略时，更需要的是其**充分条件**。
  - 因此，**动态规划的基本方程**，或者说是**最优性定理**，才是**动态规划的理论基础**。

# 动态规划的最优性定理

- 最优性定理

设阶段数为 $n$ 的多阶段决策过程，其阶段编号为 $k=0,1,\dots,n-1$ 。允许策略 $p_{0,n-1}^* = (u_0^*, u_1^*, \dots, u_{n-1}^*)$ 为最优策略的充分必要条件是对任意的 $k$

$$0 < k < n - 1, s_0 \in S_0$$

有

$$V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}^*) = \max_{p_{0,k-1} \in P_{0,k-1}(s_0)} \left\{ V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \max_{p_{k,n-1} \in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) \right\}$$

其中  $p_{0,n-1}^* = (p_{0,k-1}, p_{k,n-1})$ ， $\tilde{s}_k = T_{k-1}(s_{k-1}, u_{k-1})$ ，它是由给定的初始状态 $s_0$ 和子策略 $p_{0,k-1}$ 所确定的 $k$ 阶段状态。

□ 证明略（参见《运筹学(第4版)》235-237页的证明）。

# 动态规划的最优性定理

- 最优性定理的推论

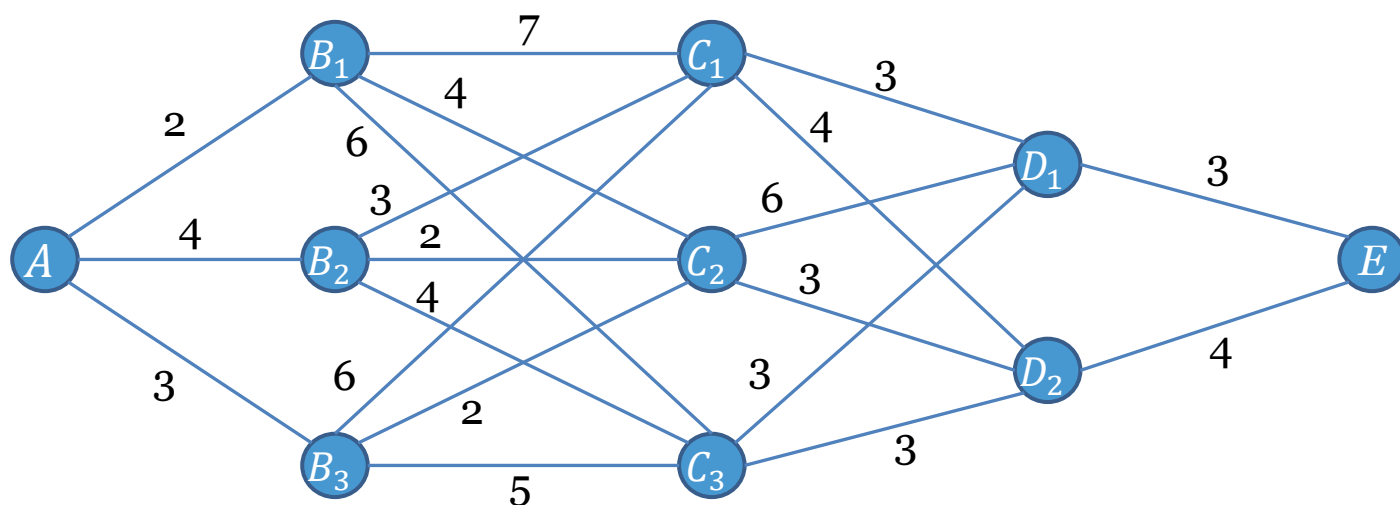
- 若允许策略 $p_{0,n-1}^*$ 是最优策略，则对任意的 $k$ ， $0 < k < n - 1$ ，它的子策略 $p_{k,n-1}^*$ 对于以 $s_k^* = T_{k-1}(s_{k-1}^*, u_{k-1}^*)$ 为起点的 $k$ 到 $n - 1$ 子过程来说，必是最优策略（注意： $k$ 阶段状态 $s_k^*$ 是由 $s_0$ 和 $p_{0,k-1}^*$ 所确定的）。

- 备注

- 上述推论即前面提到的动态规划的“**最优性原理**”。
- 由**最优性定理**可知：如果一个决策问题有最优策略，则该问题的最优值函数一定可以用动态规划的基本方程来表示，反之亦然。
- **最优性定理**为人们用动态规划方法去处理决策问题提供了理论依据和方法，即：要充分分析决策问题的结构，使之满足动态规划的条件，正确地写出动态规划的基本方程。

# 课堂练习

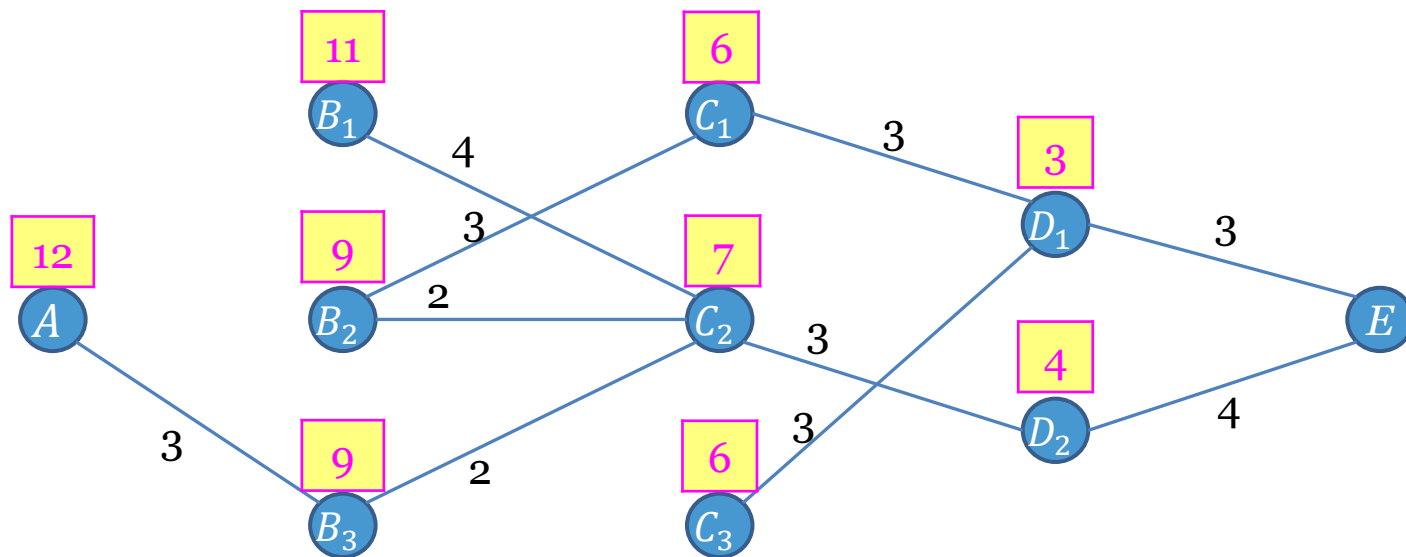
- 求如下给定的网络图中，从A点到E点的最短路线。  
图中两点之间连线旁的数字表示两点间的距离。



类似地，可用**顺序标号法**来进行求解。

# 课堂练习

- 解：**可用**动态规划**的**逆序解法**来求解，并可在图上直接进行，称之为**（逆序）标号法**。下图中**每个顶点上方方格内的数字**表示该点到终点**E**的最短距离，两顶点间的边保留则表示该边为其所关联的左侧端点到终点E的最短路上的边。





Thank you!

谢谢!