运筹与优化

Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

图与网络分析

第六章

最小费用流问题

第5节

最小费用流

最小费用问题
的一般提法

- 问题模型
  - 给定网络$D=(V,A,U,C)$，每条弧$(v_i,v_j)\in A$上除了已给的容量u_{ij}外，还赋予一个单位流量的费用$c_{ij}\geq 0$。
  - **最小费用网络流问题**（minimum cost network flow problem, MCNFP）就是要在网络$D=(V,A,U,C)$中求一个可行流$f=\{f_{ij}\}$，使得流量$v(f)=v$且总输送费用

$$c(f)=\sum_{(v_i,v_j)\in A} c_{ij}f_{ij}$$

    为最小。
  - 特别地，当要求f为最大流时，此问题即为**最小费用最大流问题**。

最小费用流

- 问题模型
  - 给定网络$D=(V,A)$，其中V有m个顶点，A有n条弧。对于每条弧$(v_i,v_j)\in A$，有两个权值：弧的容量u_{ij}和输送单位流量的费用c_{ij}. 每个顶点v_i对应一个权值b_i，表示该点的供应量或需求量，并称$b_i>0$的点称为供应点，$b_i<0$的点称为需求点，$b_i=0$的点称为中间点（或转运点）。
  - 假设网络的总供应量与总需求量相等，即$\sum_{i=1}^{m} b_i=0$。令x_{ij}为弧(v_i,v_j)上的流量，则(有容量限制的)**最小费用流问题**可表示为：

$$\min \sum_{(v_i,v_j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{\{j:(v_i,v_j)\in A\}} x_{ij}-\sum_{\{j:(v_j,v_i)\in A\}} x_{ji}=b_i\,, & \text{for all } v_i\in V\\ 0\le x_{ij}\le u_{ij}, & \text{for all } (v_i,v_j)\in A\end{cases}$$

最小费用流

- 算法基础
  - 最小费用流问题是网络流模型中最为基本的一个优化问题，是一个具有**特定网络结构**的线性规划问题。
  - 最短路问题、最大流问题、指派问题、运输问题都是最小费用流问题的特例。
  - 可以利用最小费用流问题特殊的网络结构，设计专门的求解算法。

最小费用流

- 算法基础
  - 求解最小费用流的算法很多。
  - 这里给出一种算法，**算法思路**如下：
    - 求最小费用流时，一方面仍通过寻找增广链来调整流量，并判别是否达到最大流量；另一方面，为了保证每步调整的流量的花费最小。因此需要找出**费用最小的增广链**，以保证调整后所给出的流的费用为最小。
    - **（可以证明）**若f是流量为$v(f)$的所有可行流中最小费用流，而μ是关于f的所有增广链中费用最小的增广链，则沿μ去调整f得到的可行流f'就是流量为$v(f')$的所有可行流中的最小费用流。这样，当f'是最大流（或达到所需流量）时，即为所求的最小费用流。

Haiyan Lu 4/27/2020
Jiangnan University

最小费用流

- 算法基础
  - 增广链的费用
    - 设μ是一条关于可行流f的增广链，以调整量$\theta = 1$调整f得到新的可行流f'；
    - 定义f'与f的费用之差$c(f') - c(f)$为增广链μ的费用：

$$c(f') - c(f) = \sum_{\mu^+} c_{ij}\left(f'_{ij} - f_{ij}\right) + \sum_{\mu^-} c_{ij}\left(f'_{ij} - f_{ij}\right)$$

$$= \sum_{\mu^+} c_{ij} - \sum_{\mu^-} c_{ij}$$

最小费用流

- 算法基础
  - 最小费用增广链
    - 设可行流f是网络$D=(V,A)$中流量为$v(f)$的最小费用流，构造赋权有向图$W(f)$，其顶点同原网络D中的顶点，而把D中的每条弧(v_i,v_j)变成两个方向相反的弧(v_i,v_j)和(v_j,v_i)，且将相应弧上的权定义为：

$$w_{ij}=\begin{cases}c_{ij}, & 若f_{ij}<u_{ij}\\ +\infty, & 若f_{ij}=u_{ij}\end{cases},\quad w_{ji}=\begin{cases}-c_{ij}, & 若f_{ij}>0\\ +\infty, & 若f_{ij}=0\end{cases}$$

(为简洁起见，权为$+\infty$的弧可以从$W(f)$中去掉)

    - 因此，在网络D中求关于f的**最小费用增广链**就等价于**在$W(f)$中求从v_s到v_t的最短路**。

最小费用流

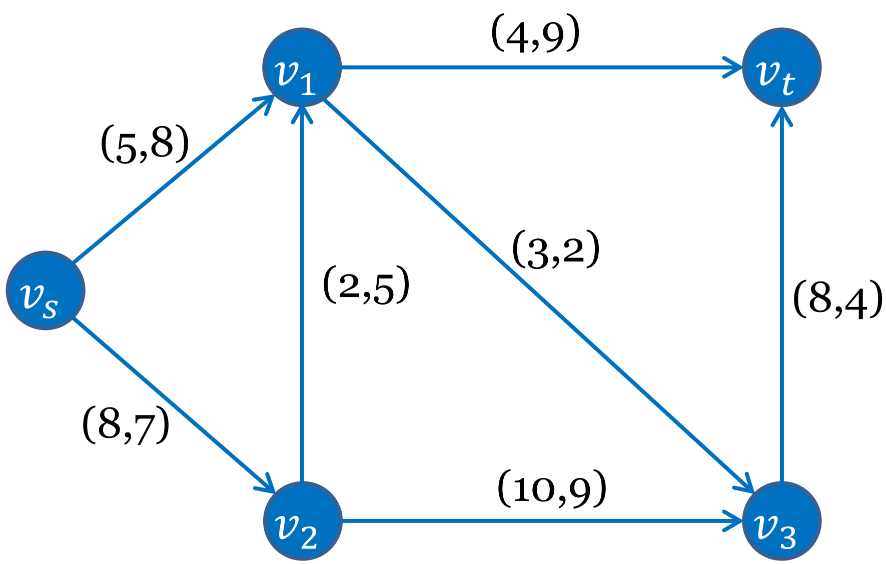
- 算法步骤
  - 开始时，可取**初始最小费用流**$f^{(0)}=0$为**零流**，令$k=0$。
  - 一般地，在第k步得到最小费用流$f^{(k)}$，构造赋权有向图$W(f^{(k)})$，在$W(f^{(k)})$中寻求从v_s到v_t的最短路（即在原给定网络D中寻求关于$f^{(k)}$的从v_s到v_t的**最小费用增广链**）：
    - 若不存在最短路，则$f^{(k)}$即为所求最小费用流，算法结束。
    - 若存在最短路，则得到原网络D的关于$f^{(k)}$的从v_s到v_t的最小费用增广链μ，沿μ对$f^{(k)}$进行调整，调整量为

$$\theta=\min\left\{\min_{\mu^+}\{u_{ij}-f_{ij}^{(k)}\},\min_{\mu^-}\{f_{ij}^{(k)}\}\right\}$$

    得到新的最小费用流$f^{(k+1)}$。
  - 令$k=k+1$，重复上述步骤。

最小费用流

- **例9** 求下述网络中从v_s到v_t的最小费用流（弧旁数字为(u_{ij}, c_{ij})）。

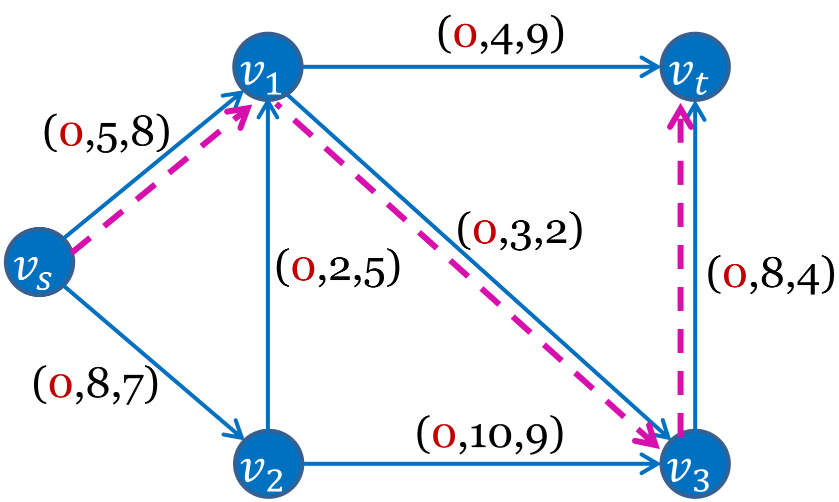


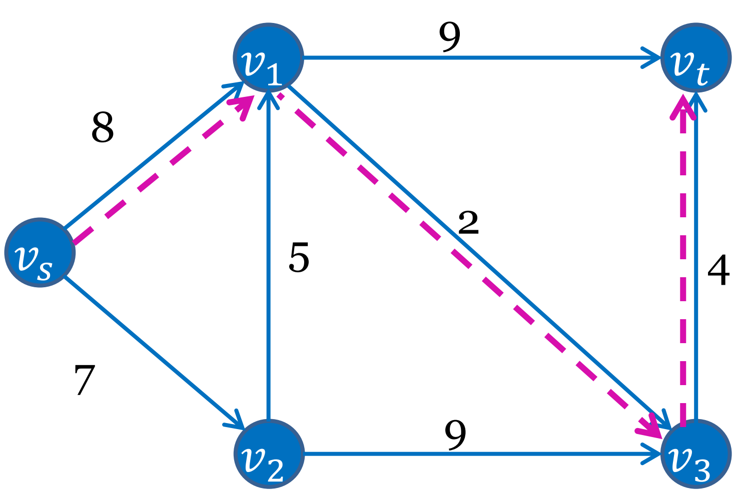
备注：这里(u_{ij}, c_{ij})表示弧上的(容量，单位流量费用)；为方便理解和计算，后面求解过程中的流量图中弧旁的数字标注为(f_{ij}, u_{ij}, c_{ij})。

最小费用流

(f_{ij}, u_{ij}, c_{ij})

- **解：** 取初始最小费用流为零流$f^{(0)} = \{0\}$，构造赋权网络$W(f^{(0)})$，求解得到最小费用增广链$\mu_1, \theta_1 = 3$，调整得到$f^{(1)}$：





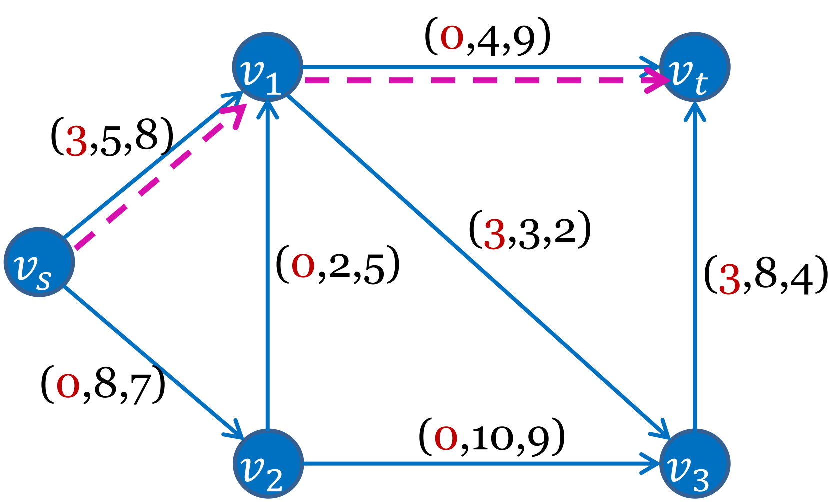
$f^{(0)}$，$v(f^{(0)}) = 0$

$W(f^{(0)})$

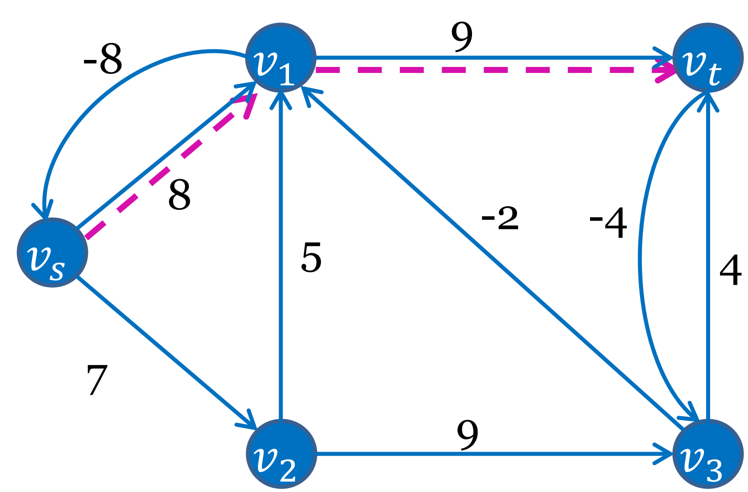
最小费用流

(f_{ij}, u_{ij}, c_{ij})

- **解(续)：** 关于$f^{(1)}$，构造赋权网络$W(f^{(1)})$，求解得到最小费用增广链$\mu_2, \theta_2 = 2$，调整得到$f^{(2)}$：



$f^{(1)}$， $v(f^{(1)}) = 3$

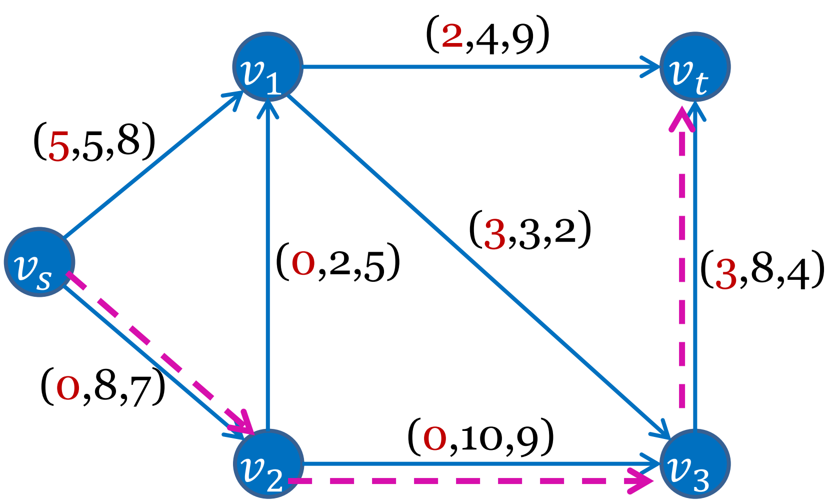


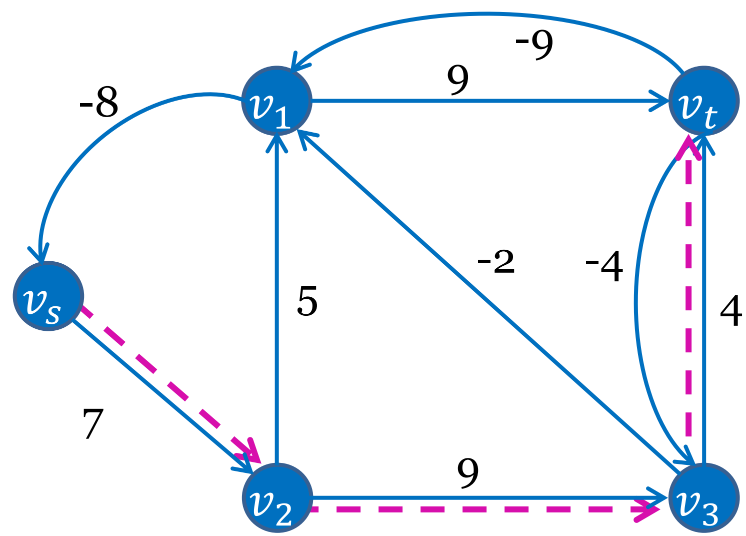
$W(f^{(1)})$

最小费用流

(f_{ij}, u_{ij}, c_{ij})

- **解(续)：** 关于$f^{(2)}$，构造赋权网络$W(f^{(2)})$，求解得到最小费用增广链$\mu_3, \theta_3 = 5$，调整得到$f^{(3)}$：





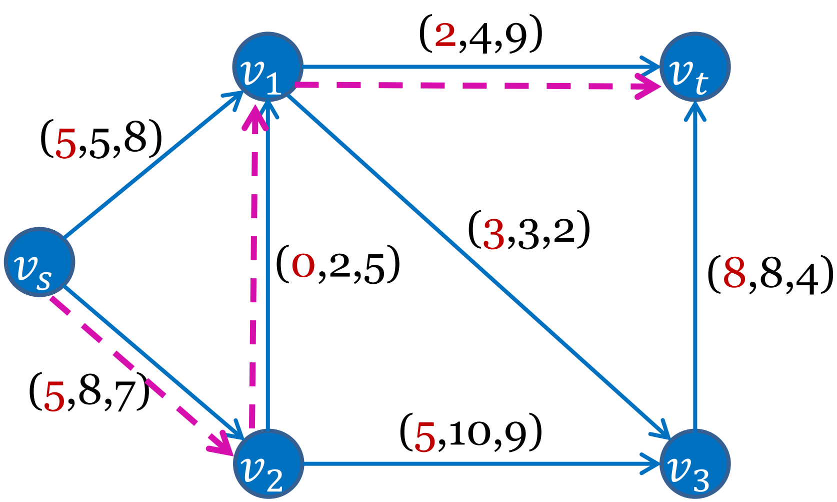
$f^{(2)}$，$v(f^{(2)}) = 5$

$W(f^{(2)})$

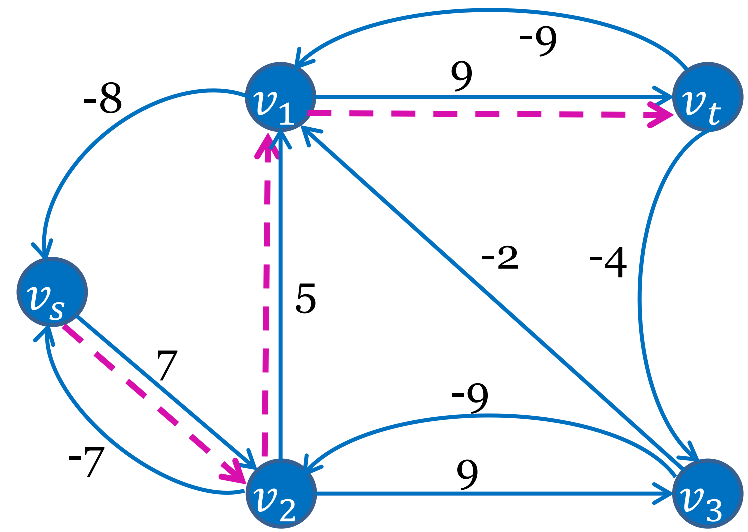
最小费用流

(f_{ij}, u_{ij}, c_{ij})

- **解(续)：** 关于$f^{(3)}$，构造赋权网络$W(f^{(3)})$，求解得到最小费用增广链$\mu_4, \theta_4 = 2$，调整得到$f^{(4)}$：



$f^{(3)}$，$v(f^{(3)}) = 10$



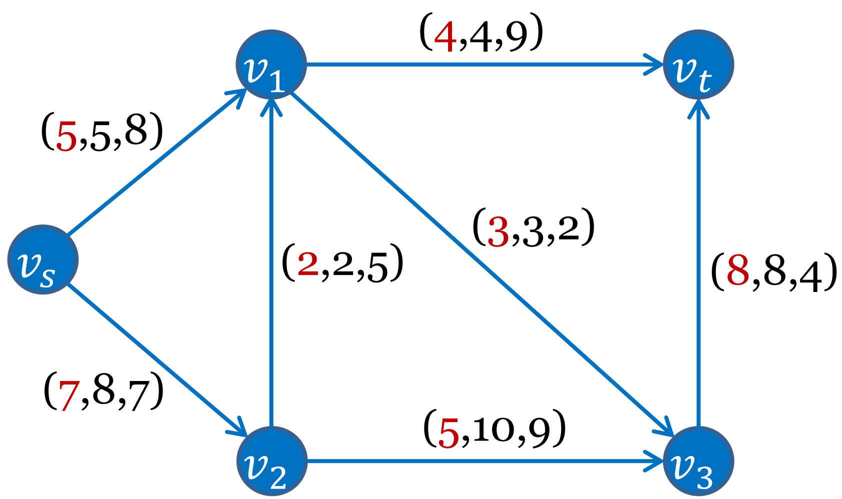
$W(f^{(3)})$

Haiyan Lu
Jiangnan University

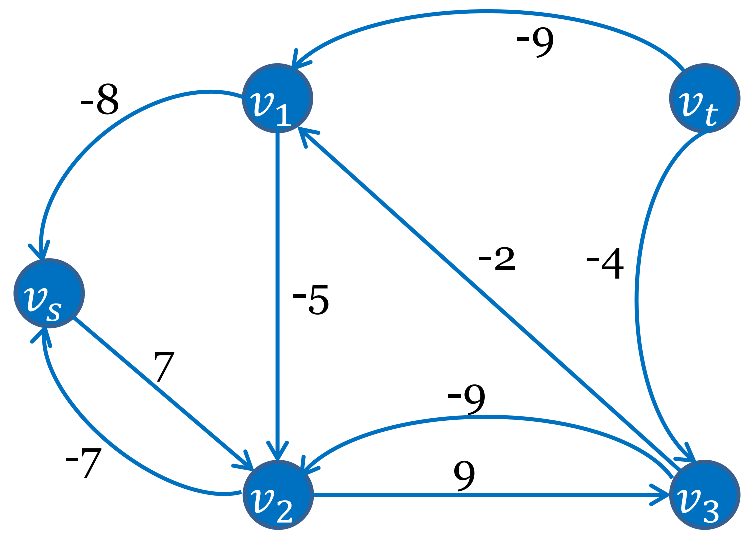
最小费用流

(f_{ij}, u_{ij}, c_{ij})

- **解(续)：** 关于$f^{(4)}$，构造赋权网络$W(f^{(4)})$：



$f^{(4)}$， $v(f^{(4)}) = 12$



$W(f^{(4)})$

在$W(f^{(4)})$中已找不到从v_s到v_t的最短路，故$f^{(4)}$即为所求最小费用流，其流量$v(f^{(4)}) = 12$ 。

思考与讨论

- 下表给出了某运输问题的产销平衡表和单位运价表。将此问题转化为最小费用最大流问题，画出网络图并进行求解。

销地 产地	1	2	3	产量
A	20	24	5	8
B	30	22	20	7
销量	4	5	6	

Haiyan Lu
Jiangnan University

Thank you!

谢谢！