# 运筹与优化
# Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

# 运输问题

第三章

# 运输问题的进一步讨论

第3节

# 产销不平衡的运输问题

- 表上作业法的前提
  - 表上作业法的计算和理论是以**产销平衡**的运输问题为前提，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- 产销不平衡运输问题的处理方法
  - 将**产销不平衡**的运输问题

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

转化为**产销平衡**的运输问题，然后再应用表上作业法求解。

# 产销不平衡的运输问题

- 产大于销的运输问题

产大于销（$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$）运输问题的数学模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

其中至少有一个为严格不等式

# 产销不平衡的运输问题

- 产大于销的运输问题
  - 处理方法：
    - 由于总产量大于总销量，因此增加一个假想的销地$B_{n+1}$(实际上用于存储)，该销地的销量为 $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i-\sum_{j=1}^{n} b_j$ ，而从产地$A_i$到假想销地$B_{n+1}$的单位运价$c_{i,n+1}=0.$
    - 设从产地$A_i$到假想销地$B_{n+1}$的运量为$x_{i,n+1}$（实际上为产地$A_i$的就地存储量），则产大于销运输问题可转化为产销平衡的运输问题：

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij}=a_i \quad (i=1,\dots,m)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad (j=1,\dots,n+1)\\ x_{ij}\geq 0\end{cases}$$

# 产销不平衡的运输问题

- 销大于产的运输问题

销大于产（$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$）运输问题的数学模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

其中至少有一个为严格不等式

# 产销不平衡的运输问题

- 销大于产的运输问题
  - 处理方法：
    - 由于总销量大于总产量，因此增加一个假想的产地$A_{m+1}$(并不实际生产)，该产地的产量为$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j-\sum_{i=1}^{m} a_i$，而从假想产地$A_{m+1}$到销地$B_j$的单位运价$c_{m+1,j}=0$.
    - 设从假想产地$A_{m+1}$到销地$B_j$的运量为$x_{m+1,j}$，则产大于销运输问题可转化为产销平衡的运输问题：

$$\min z=\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \quad (i=1,\ldots,m+1)\\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij}=b_j \quad (j=1,\ldots,n)\\ x_{ij}\geq 0\end{cases}$$

# 产销不平衡的运输问题

- **例2** 设有三个产地$A_1,A_2,A_3$生产某种物资，其产量分别为7吨, 5吨, 7吨，$B_1,B_2,B_3,B_4$四个销地需要该种物资，销量分别为2吨, 3吨, 4吨, 6吨，又知各产销地之间的单位运价表如下，试决定总运费最少的调运方案。

| 产地 | 销地 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
| $A_1$ | 2 | 11 | 3 | 4 |
| $A_2$ | 10 | 3 | 5 | 9 |
| $A_3$ | 7 | 8 | 1 | 2 |

# 产销不平衡的运输问题

- 解：

此为产(19吨)大于销(15吨)的运输问题，按上述方法转化为产销平衡的运输问题，其产销平衡表和单位运价表如下：

| 产地 | 销地 | | | | | 产量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$(库存) | |
| $A_1$ | 2 | 11 | 3 | 4 | 0 | 7 |
| $A_2$ | 10 | 3 | 5 | 9 | 0 | 5 |
| $A_3$ | 7 | 8 | 1 | 2 | 0 | 7 |
| 销量 | 2 | 3 | 4 | 6 | 4 | |

# 产销不平衡的运输问题

- 解(续):

用表上作业法求得最优方案如下表所示

| 产地 | 销地 | | | | | 产量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$(库存) | |
| $A_1$ | 2 | | | 3 | 2 | 7 |
| $A_2$ | | 3 | | | 2 | 5 |
| $A_3$ | | | 4 | 3 | | 7 |
| 销量 | 2 | 3 | 4 | 6 | 4 | |

# 产销不平衡的运输问题

- **例3** 设有三个化肥厂供应四个地区的农用化肥。假定等量的化肥在这些地区的使用效果相同，已知各化肥厂年产量、各地区年需求量及从各化肥厂到给地区单位化肥的运价表如下，试决定总运费最少的化肥调拨方案。

| 产地 | 销地 | | | | 产量(万吨) |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | |
| *A* | 16 | 13 | 22 | 17 | 50 |
| *B* | 14 | 13 | 19 | 15 | 60 |
| *C* | 19 | 20 | 23 | — | 50 |
| 最低需求(万吨) | 30 | 70 | 0 | 10 | |
| 最高需求(万吨) | 50 | 70 | 30 | 不限 | |

160-100=60

# 产销不平衡的运输问题

- 解：

此为产销不平衡的运输问题，总产量为160万吨，总最低需求为110万吨，总最高需求为无限。

按现有产量，第IV个地区每年最多可分配到160–(30+70+0)=60万吨，因此四个地区的总最高需求为50+70+30+60=210万吨，销量大于产量。

故增加一个假想的(产地)化肥厂*D*，其产量为210–160=50万吨。

每个地区的最低需求不能由假想化肥厂*D*供给，故令相应运价为任意大正数*M*，而最高需求与最低需求之差则可以由假想化肥厂*D*供给，故令相应运价为0。

需求分两种情况的地区按两个地区对待，由此可得该问题的产销平衡及单位运价表（见下页）：

# 产销不平衡的运输问题

- 解(续)：

该问题的产销平衡及单位运价表如下：

| 产地 | 销地 | | | | | | 产量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I' | I'' | II | III | IV' | IV'' | |
| *A* | 16 | 16 | 13 | 22 | 17 | 17 | 50 |
| *B* | 14 | 14 | 13 | 19 | 15 | 15 | 60 |
| *C* | 19 | 19 | 20 | 23 | *M* | *M* | 50 |
| *D* | *M* | 0 | *M* | 0 | *M* | 0 | 50 |
| 销量 | 30 | 20 | 70 | 30 | 10 | 50 | |

# 产销不平衡的运输问题

- 解(续):

应用表上作业法，求得该问题的最优调运方案如下表所示:

| 产地 | 销地 | | | | | | 产量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I' | I" | II | III | IV' | IV" | |
| *A* | | | 50 | | | | 50 |
| *B* | | | 20 | | 10 | 30 | 60 |
| *C* | 30 | 20 | 0 | | | | 50 |
| *D* | | | | 30 | | 20 | 50 |
| 销量 | 30 | 20 | 70 | 30 | 10 | 50 | |

# 应用举例

课后自行学习教材《运筹学基础及应用》115页的例4

- **例4** (转运问题) 下表给出了一个运输问题，但允许其中的物资在$A_2, B_2, B_3$处转运，$A_1$和$A_2$, $B_2$和$B_1$, $B_3$和$B_1$, $B_2$和$B_3$，相互间运输单价分别为2, 3, 2, 4。问如何处理该问题？

| 产地 \ $c_{ij}$ \ 销地 | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | 产量 |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | 4 | 6 | 10 |
| $A_2$ | 5 | 2 | 3 | 20 |
| 销量 | 12 | 7 | 11 | 30 |

# 应用举例

- **解：**

由于$A_2, B_2, B_3$可以作为**转运点**，因此，它们既可作为产地，又可作为销地。转运点的销售量不能取为零，而应在原销售量上加上一个大的数，此数一般取小于或等于$\sum a_i$. 本例中可取30，相应转运点的产量也需加上此数，这样将问题转化为一个扩大的产销平衡的运输问题，其产销平衡及单位运价表如下：

| 产地 \ $c_{ij}$ \ 销地 | $A_2$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | 产量 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 6 | 4 | 6 | 10 |
| $A_2$ | 0 | 5 | 2 | 3 | 50 |
| $B_2$ | 2 | 3 | 0 | 4 | 30 |
| $B_3$ | 3 | 2 | 4 | 0 | 30 |
| 销量 | 30 | 12 | 37 | 41 | |

# 应用举例

教材习题三的3.6

- **例5** 某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供10, 15, 25, 20台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如下表所示。又如果生产出来的柴油机当季不交货的，每台积压一个季度需储存、维护等费用0.15万元。要求在完成合同的情况下，做出使该厂全年生产（包括储存、维护）费用最小的决策。

| 季度 | 生产能力（台） | 单位成本（万元） |
|---|---|---|
| I | 25 | 10.8 |
| II | 35 | 11.1 |
| III | 30 | 11.0 |
| IV | 10 | 11.3 |

# 应用举例

- **解：**

由于每个季度生产出来的柴油机不一定当季交货，故设$x_{ij}$为第$i$季度生产的用于第$j$季度交货的柴油机数。根据合同要求，必须满足

$$\begin{cases} x_{11} & = 10 \\ x_{12} + x_{22} & = 15 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & = 25 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} & = 20 \end{cases}$$

且每季度生产的用于当季和以后各季交货的柴油机数不可能超过该季度的生产能力，故又有

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 25 \\ x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 35 \\ x_{33} + x_{34} \leq 30 \\ x_{44} \leq 10 \end{cases}$$

# 应用举例

- **解(续):**

第$i$季度生产的用于第$j$季度交货的每台柴油机的实际成本$c_{ij}$应该是该季度单位成本加上储存、维护等费用。$c_{ij}$的具体数值经计算得到下表:

| $i$ | $j$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| I | 10.8 | 10.95 | 11.10 | 11.25 |
| II | | 11.10 | 11.25 | 11.40 |
| III | | | 11.00 | 11.15 |
| IV | | | | 11.30 |

# 应用举例

- **解(续):**

设$a_i$表示该厂第$i$季度的生产能力，$b_j$表示该厂第$j$季度的合同供应量，则问题的数学模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \le a_i & (i=1,\dots,4)\\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = b_j & (j=1,\dots,4)\\ x_{ij}\ge 0\end{cases}$$

这是一个产大于销的运输问题。注意到该问题中当$i>j$时，有$x_{ij}=0$，故应令相应的$c_{ij}=M$；另外需增加一个假想的销地$D$，这样就可以把该问题转化为产销平衡的运输问题，并写出相应的产销平衡及单位运价表（见下表）。

# 应用举例

- **解(续):**

转化为产销平衡的运输问题后的产销平衡及单位运价表如下：

| 产地 | 销地 | | | | | 产量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | *D* | |
| I | 10.8 | 10.95 | 11.10 | 11.25 | 0 | 25 |
| II | *M* | 10.10 | 11.25 | 11.40 | 0 | 35 |
| III | *M* | *M* | 11.00 | 11.15 | 0 | 30 |
| IV | *M* | *M* | *M* | 11.30 | 0 | 10 |
| 销量 | 10 | 15 | 25 | 20 | 30 | |

# 应用举例

- **解(续):**

用表上作业法求解，可得多个最优方案，下表列出了多个方案之一。按该方案生产，该厂总的生产费用（包括储存、维护）为773万元。

| 生产季度 | 销售季度 | | | | | 产量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | *D* | |
| I | 10 | 15 | 0 | | | 25 |
| II | | | 5 | | 30 | 35 |
| III | | | 20 | 10 | | 30 |
| IV | | | | 10 | | 10 |
| 销量 | 10 | 15 | 25 | 20 | 30 | |

# 谢 谢！

# Thank you!