运筹与优化

Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系

2019-2020-2学期

Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

线性规划的对偶理论

第二章

参数线性规划

第6节

参数线性规划

- 灵敏度分析(Sensitivity Analysis)主要讨论在最优基(解)不变情况下，确定系数a_{ij}, b_i, c_j的变化范围。
- 参数分析(Parametric Analysis)或参数线性规划研究上述系数中含有的参数λ连续变化时，问题的最优解如何随参数值的变化而变化，并求出使最优解发生变化的各临界点的目标函数值。
  - 参数线性规划要求问题中参数λ变化时，应使目标函数值$z(\lambda)$是λ的线性函数。
  - 有多个b_i变动时，可表示为$b_i' = b_i + a_i\lambda$，其中a_i是任意给定的一个实数。
  - 有多个c_j变动时，可表示为$c_j' = c_j + a_j\lambda$， 其中a_j是任意给定的一个实数。

参数线性规划

- 分析步骤：

（1）令$\lambda = 0$，求解得最终单纯形表；

（2）将参数的变化反映到最终单纯形表中；

（3）随着λ的增大或减小，观察原始问题或对偶问题：

  - 一是确定表中现有解（基）允许λ值的变动范围；
  - 二是当λ值的变动超出这个范围时，用单纯形法或对偶单纯形法求得新的解；

（4）重复第（3）步，一直到λ值继续增大或减小时，表中的解（基）不再出现变化时为止

参数线性规划

- **例12** 求解下述参数线性规划问题：

$$\max z(\lambda) = (2+2\lambda)x_1 + (3+\lambda)x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \le 16 \\ 5x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

参数线性规划

- **解:**

（1）令$\lambda = 0$，用单纯形法求得最终单纯形表（见下表）：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3	1	0	$1/2$	0	$-1/5$
0	x_4	4	0	0	-2	1	$4/5$
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/5$
$c_j - z_j$			0	0	-1	0	$-1/5$

（2）将参数的变化反映到上述最终单纯形表中，得到下表：

参数线性规划

- **解（续）：**

$c_j \rightarrow$			$2+2\lambda$	$3+\lambda$	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$2+2\lambda$	x_1	3	1	0	$1/2$	0	$-1/5$
0	x_4	4	0	0	-2	1	$4/5$
$3+\lambda$	x_2	3	0	1	0	0	$1/5$
$c_j - z_j$			0	0	$-1-\lambda$	0	$-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\lambda$

上表中最优基不变的条件是：$-1 \le \lambda \le 1.$

当$\lambda < -1$时， x_3的检验数$-1-\lambda > 0$，将x_3作为入基变量进行单纯形法迭代，得到下表：

参数线性规划

- **解（续）：**

$c_j \rightarrow$			$2+2\lambda$	$3+\lambda$	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	6	2	0	1	0	$-2/5$
0	x_4	16	4	0	0	1	0
$3+\lambda$	x_2	3	0	1	0	0	$1/5$
$c_j - z_j$			$2+2\lambda$	0	0	0	$-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\lambda$

上表中最优基不变的条件是：$-3 \le \lambda < -1.$

当$\lambda < -3$时， x_5的检验数 $-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\lambda > 0$，将$x_5$作为入基变量进行单纯形法迭代，得到下表：

参数线性规划

- **解（续）：**

$c_j \rightarrow$			2+2λ	3+λ	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	12	2	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
	x_5	15	0	5	0	0	1
$c_j - z_j$			2+2λ	3+λ	0	0	0

上表中最优基不变的条件是：$\lambda < -3.$

当$\lambda > 1$时，前面第二个表中 x_5的检验数 $-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\lambda > 0$，将$x_5$作为入基变量进行单纯形法迭代，得到下表：

参数线性规划

- **解（续）：**

$c_j \rightarrow$			$2+2\lambda$	$3+\lambda$	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$2+2\lambda$	x_1	4	1	0	0	0	0
0	x_5	5	0	0	$-2/5$	1	$4/5$
$3+\lambda$	x_2	2	0	1	$1/2$	0	$1/5$
$c_j - z_j$			0	0	$-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda$	0

上表中最优基不变的条件是：$\lambda > 1$.

参数线性规划

- **解（续）：**

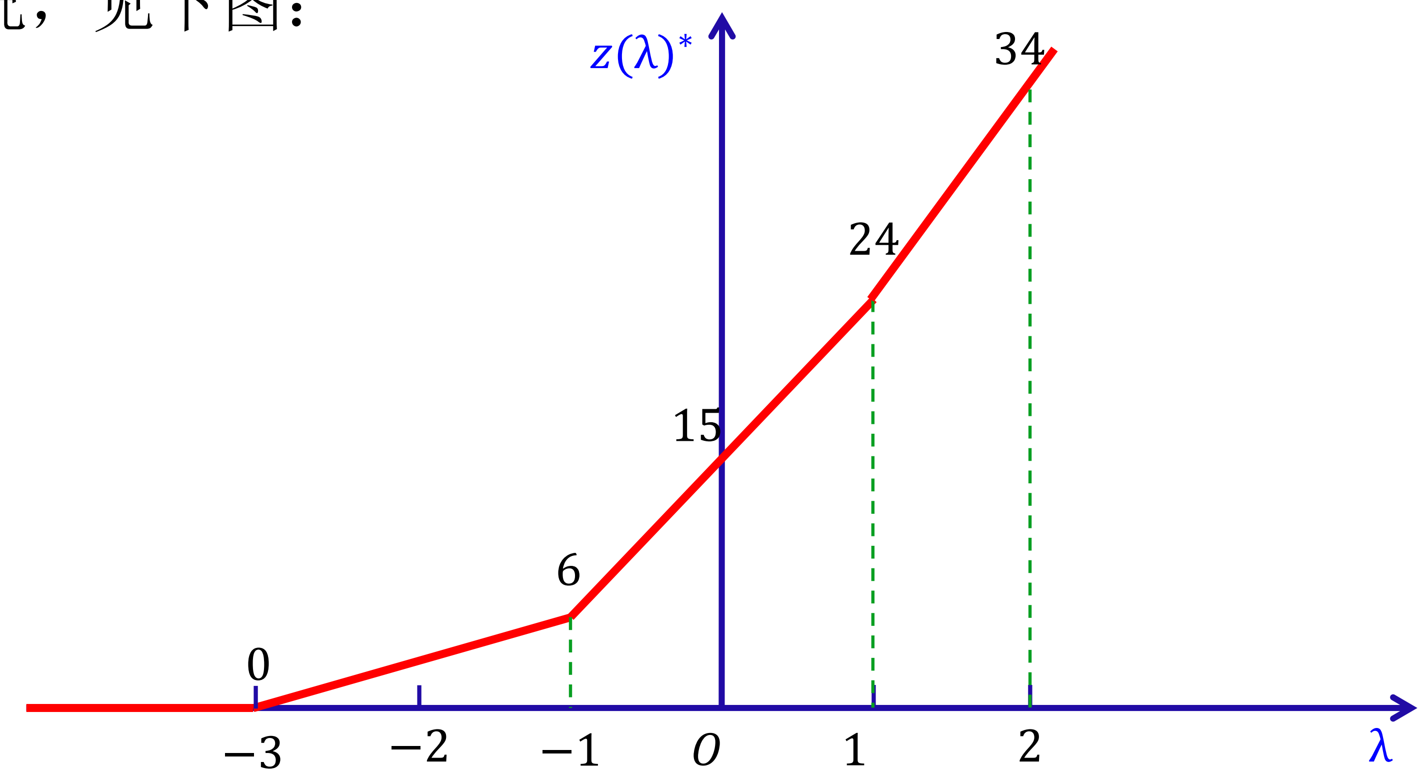
综上所述，问题的最优解及最优值随参数λ变化的情况如下表所示：

λ变化范围	最优解 $(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*,x_5^*)$	最优值 $z(\lambda)^*$
$(-\infty,-3)$	$(0,0,12,16,15)$	0
$[-3,-1)$	$(0,3,6,16,0)$	$3\lambda+9$
$[-1,1]$	$(3,3,0,4,0)$	$9\lambda+15$
$(1,+\infty)$	$(4,2,0,0,5)$	$10\lambda+14$

参数线性规划

- **解（续）：**

以λ为横坐标，$z(\lambda)^*$为纵坐标，可画出$z(\lambda)^*$随参数λ变化的情况，见下图：



谢 谢！

Thank you!