排队论

第十章

一般服务时间模型

第6节

概 述

- 前面所讨论的排队模型均建立在生灭过程基础上，即顾客相继到达时间间隔和服务时间均为负指数分布的情况。此类排队系统的一个主要特征为马尔科夫性，而马尔科夫性的一个主要性质是由系统当前状态可以推断未来的状态。
- 当输入过程或服务时间不是负指数分布时，正在接受服务的顾客已被服务的时间将影响其离开系统的时间，因而仅由系统当前状态来推断其未来状态是不充足的。所以必须引入新的方法来处理具有非负指数分布的排队系统。
    - 对于这类系统的分析较为复杂，这里仅介绍$M/G/1$模型及几个特例。

$M/G/1$模型

- 基本结论
  - 对于泊松输入、服务时间为任意分布、单服务台的排队模型，下面的公式（关系）总是成立：

$$\begin{cases} L_s = L_q + L_{se} \\ W_s = W_q + W_{se} \end{cases}$$

  - 此外，**Little公式**也成立：

$$\begin{cases} L_s = \lambda W_s \\ L_q = \lambda W_q \\ L_{se} = \lambda W_{se} \end{cases}$$

  - **符号说明：**
    - W_{se}为服务时间T的期望值，即$E[T]$；
    - L_{se}为服务机构中平均顾客数（即期望值）；
    - 在模型中**顾客源为有限**和**系统容量有限制**情况下，要将λ换成λ_{eff}.

$M/G/1$模 型

- P-K公式(Pollaczek-Khintchine)
  - 若服务时间T的期望值$E[T]$和方差$\mathrm{Var}[T]$都存在，且$\rho = \lambda E[T] < 1$，则有

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \mathrm{Var}[T]}{2(1-\rho)}$$

此即P-K公式。

L_s等几个系统基本运行指标仅依赖于ρ和服务时间的方差$\mathrm{Var}[T]$，此为排队论中一个非常重要且令人惊奇的结果。

  - 备注：
    - 对于$M/G/1$模型，在已知$\lambda, E[T]$和$\mathrm{Var}[T]$的情况下，利用P-K公式以及Little公式，可以很方便地求得L_q, W_s和W_q：

$$L_q = L_s - L_{se} = L_s - \rho = \frac{\rho^2+\lambda^2 \mathrm{Var}[T]}{2(1-\rho)}, \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \quad W_s = W_q + E[T]$$

    - **P-K公式表明**：由于有方差项的存在，因此在研究$M/G/1$系统各运行指标期望值时，完全不考虑概率性质会得出错误结论；仅当$\mathrm{Var}[T]=0$时，T的随机性波动才不会影响系统的L_s等运行指标，而在服务时间分布的方差很大的情况下，运行指标就很差。因此，要想改进系统的各项指标，除考虑期望值外，还可考虑改变方差。

$M/G/1$模 型

- $M/\ D\ /1$模型
  - 若模型中服务时间为确定的常数，则下面的公式成立

$$T = \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{Var}[T] = 0$$

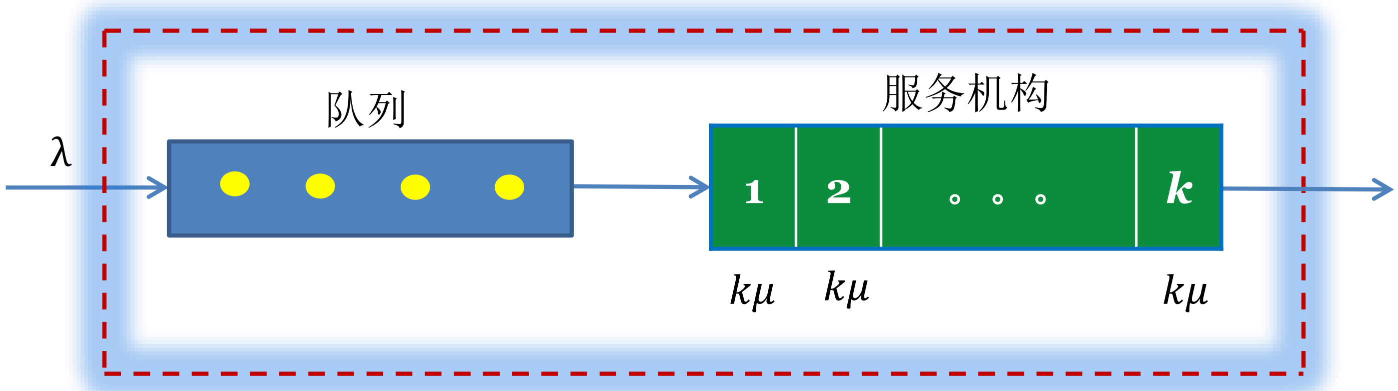
$$L_s = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

  - 备注
    - 可以证明：在一般服务时间分布的L_q和W_q中以定长服务时间的为最小。

（即：服务时间越有规律，等候的时间就越短）

$M/G/1$模型

- $M/E_k/1$模型
  - 模型概述
    - 顾客须经过k个服务台，在每个服务台的服务时间T_i相互独立，且服从相同的负指数分布（参数为$k\mu$）。
    - 除服务时间外，$M/E_k/1$模型其余的条件与$M/M/1$模型相同。



排队系统

$M/G/1$模型

- $M/E_k/1$模型
  - 模型求解
    - 顾客在服务机构总的服务时间$T=\sum_{i=1}^{k} T_i$服从k阶爱尔朗分布，且有

$$E[T_i]=\frac{1}{k\mu},\ \mathrm{Var}[T_i]=\frac{1}{k^2\mu^2},\ E[T]=\frac{1}{\mu},\ \mathrm{Var}[T]=\frac{1}{k\mu^2}$$

    - 系统的运行指标

$$L_s=\rho+\frac{\rho^2+\frac{\lambda^2}{k\mu^2}}{2(1-\rho)}=\rho+\frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}$$

$$L_q=L_s-\rho=\frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}$$

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda},\quad W_q=\frac{L_q}{\lambda}$$

其中$\rho=\lambda E[T]=\frac{\lambda}{\mu}$.

$M/G/1$模型

- 例7 有一售票口，已知顾客按平均为2分30秒的时间间隔的负指数分布到达。顾客在售票口前服务时间平均为2分钟。
  - (1)若按服务时间也服从负指数分布，求顾客为购票所需的平均逗留时间和等待时间；
  - (2)若经过调查，顾客在售票口前至少要占用1分钟，且认为服务时间服从负指数分布是不恰当的，而应服从以下概率密度分布，再求顾客的逗留时间和等待时间。

$$f(y)=\begin{cases} e^{-y+1}, & y\geq 1 \\ 0, & y<1 \end{cases}$$

- 解:
  - (1) M/M/1模型： $\lambda=1/2.5=0.4,\ \mu=1/2=0.5,\ \rho=\lambda/\mu=0.8.$

$$W_s=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{0.5-0.4}=10\ (\text{分钟})$$

$$W_q=\frac{\rho}{\mu-\lambda}=\frac{0.8}{0.5-0.4}=8\ (\text{分钟})$$

$M/G/1$模 型

- 解（续）：
  - (2) M/G/1模型：令Y为服务时间，$X=Y-1$，则X服从均值为1的负指数分布。因此，

$$Y=X+1, E[Y]=2, \mathrm{Var}[Y]=\mathrm{Var}[X+1]=\mathrm{Var}[X]=1$$
$$\rho=\lambda E[Y]=0.4\times 2=0.8$$

代入P-K公式，得

$$L_s=\rho+\frac{\rho^2+\lambda^2\mathrm{Var}[Y]}{2(1-\rho)}=0.8+\frac{0.8^2+0.4^2\times 1}{2\times(1-0.8)}=2.8$$
$$L_q=L_s-\rho=2.8-0.8=2$$
$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{2.8}{0.4}=7\ (\text{分钟})$$
$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{2}{0.4}=5\ (\text{分钟})$$

$M/G/1$模型

- 例8 某实验室有一台自动检验机器性能的仪器，要求检验机器的顾客按泊松分布到达，每小时平均4个顾客，检验每台机器所需时间为6分钟。求：
  - (1)在检验室内机器台数的期望值L_s；
  - (2)等候检验的机器台数期望值L_q ；
  - (3)每台机器在室内消耗（逗留）时间期望值W_s；
  - (4)每台机器等待检验时间期望值W_q。
- 解： M/D/1模型.
  - $\lambda=4$，$E[T]=\frac{6}{60}=0.1$(小时)，$\rho=\lambda E[T]=4\times 0.1=0.4$，$\mathrm{Var}[T]=0.$
  - (1) $L_s=\rho+\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}=0.4+\frac{0.4^2}{2\times 0.6}=0.533$(台)
  - (2) $L_q=L_s-\rho=0.533-0.4=0.133$ (台)
  - (3)$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{0.533}{4}=0.133$(小时)=8(分钟)
  - (4)$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{0.133}{4}=0.033$(小时) $=2$(分钟)

$M/G/1$模 型

- 例9 某单人裁缝店做西服，每套需经过4个不同工序，4个工序完成后才开始做另一套。每一工序的时间服从负指数分布，期望值为2小时。顾客到来服从泊松分布，平均订货率为5.5套/周(设一周6天, 每天8小时)。问一顾客为等到做好一套西服期望时间有多长？
- 解:
  - 此为$M/\ E_4\ /1$模型，$k=4$，$\lambda=5.5$套/周，平均每个工序所需时间$1/4\mu=2$ 小时, 平均每套所需时间$1/\mu=8$ 小时，平均服务率(单位时间做完的套数) $\mu=1/8$套/小时=6 套/周，$\rho=\lambda/\mu=5.5/6$.
  - 因此，

$$L_s=\rho+\frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}=\frac{5.5}{6}+\frac{(4+1)\times\left(\frac{5.5}{6}\right)^2}{2\times4\times(1-\frac{5.5}{6})}=7.2188\ (周)$$

  - 顾客为等到做好一套西服的期望时间为

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{7.2188}{5.5}=1.3\ (周)$$

Thank you!

谢 谢！