存储论

第九章

确定型存储模型

第2节

模型1:不允许缺货，备货时间很短

- 模型假设
  - (1)单位缺货费用无穷大;
  - (2)当存储降至零时，可以立即得到补充(即备货时间或拖后时间很短，可以近似地看做零);
  - (3)需求是连续的、均匀的，设需求率R为常数，则t时间的需求量为Rt;
  - (4)每次订货量不变，订购费不变(每次备货量不变，装配费不变);
  - (5)单位存储费(单位时间内单位存储物的存储费用)不变。
- 备注:
  - 在研究、建立模型时，需要做一些假设，目的是使模型简单、易于理解、便于计算。
  - 本模型即为《运筹学基础及应用（第6版）》245页第2-1节的模型。

模型1:不允许缺货，备货时间很短

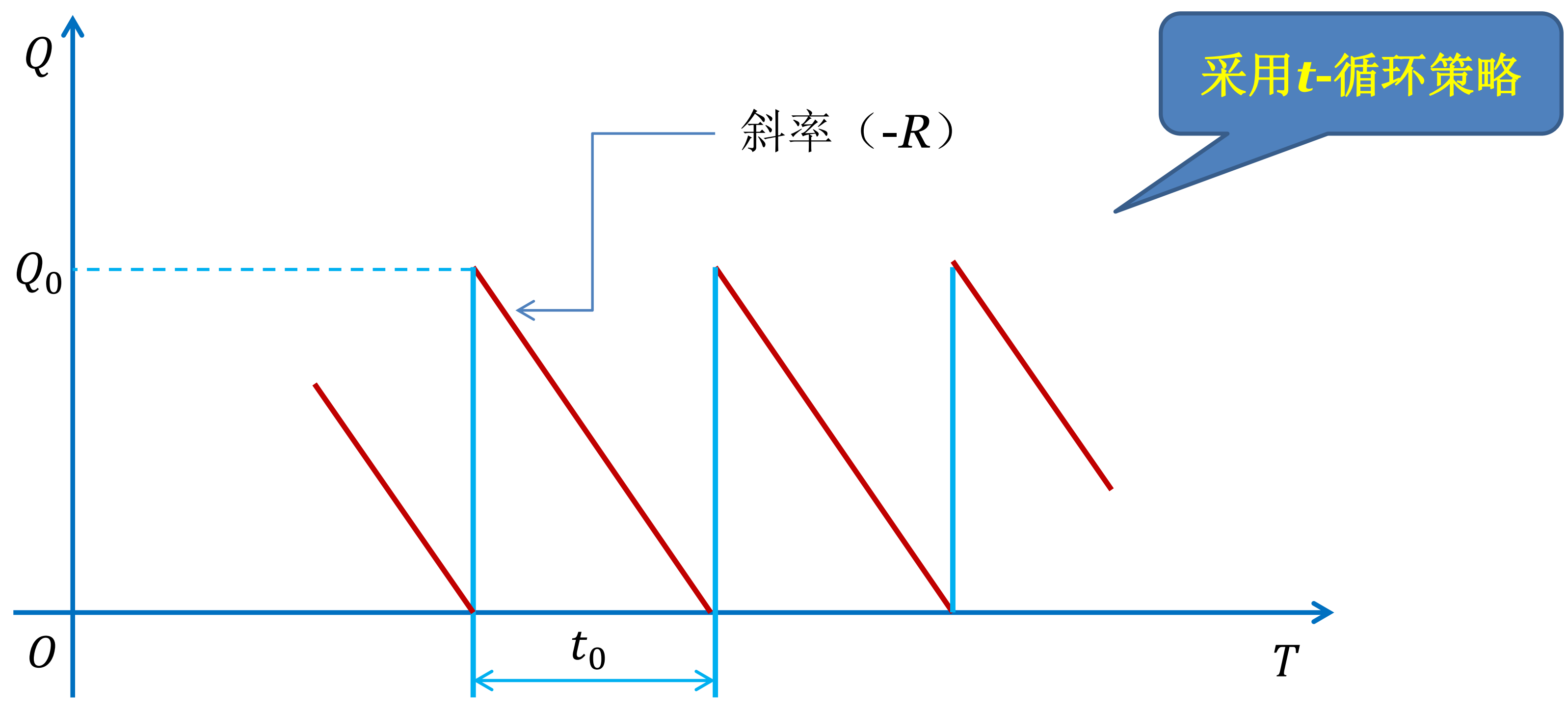
- 模型假设（参考）

The assumptions of the basic economic order quantity are:

- The inventory consists of one single unperishable good held in one location,
- The demand rate for the item is constant over time and demand must be satisfied exactly,
- Units are ordered from a single supplier in the same amount each time. For now, we assume that replenishment is instantaneous, even though that is not really necessary as we will show later,
- There are no quantity discounts,
- Stockouts are not allowed and the demand must be satisfied completely, and
- The planning horizon is infinite and all model parameters are stationary, i.e., they do not change over time.

模型1:不允许缺货，备货时间很短

- 存储量变化情况图示（**存储状态图**）



模型1:不允许缺货，备货时间很短

- 分析
  - 由于货物可立即得到补充，所以不会缺货，在研究此类模型时不再考虑缺货费用。
  - 上述假设条件只是近似的正确，在这些假设条件下，可用**总平均费用**来衡量存储策略的优劣。
    - 为找出费用最低的策略，考虑到在需求确定的情况下，每次订货量多，则订货次数可以减少，从而减少了订购费。但是每次订货量多，会增加存储费用。
    - 因此，为研究费用的变化，需要导出费用函数。

模型1:不允许缺货，备货时间很短

- 解:

设每隔t时间补充一次存储，则订货量Q必须满足时间t的需求Rt，即

$$Q = Rt$$

设一次订购费(固定费用)为C_3，货物单价为K，则t时间内**订货费**为

$$C_3 + KRt$$

t时间内的平均存储量为

$$\frac{1}{t}\int_0^t RT\mathrm{d}T = \frac{1}{2}Rt \quad \text{(也可由几何知识得出)}$$

设单位时间内单位物品存储费用为C_1，则t时间内**存储费**为

$$\frac{1}{2}RtC_1t$$

故t时间内**总费用**为

$$C_3 + KRt + \frac{1}{2}RtC_1t$$

Haiyan Lu
Jiangnan University

模型1:不允许缺货，备货时间很短

- 解（续）：

t时间内总的平均费用为

$$C(t)=\frac{C_3}{t}+KR+\frac{1}{2}RtC_1$$

由$\frac{\mathrm{d}c\,(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{C_3}{t^2}+\frac{1}{2}C_1R=0$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2c(t)}{\mathrm{d}t^2}>0$，得使$C(t)$最小的订货间隔为

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$$

最佳订货批量为:

$$Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$$

最小平均总费用为:

$$C(t_0)=\sqrt{2C_1C_3R}+KR$$

模型1:不允许缺货，备货时间很短

- 备注
  - 模型1中，公式$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$即为著名的**经济订购批量**(Economic Order Quantity, EOQ)公式,也称平方根公式，或**经济批量**(economic lot size)公式。
  - 由于在最优订购间隔和EOQ公式中，t_0, Q_0均与货物单价K无关，因此后面的分析中略去KR这项费用。如无特殊需要不再考虑此费用，故$C(t)$改写为

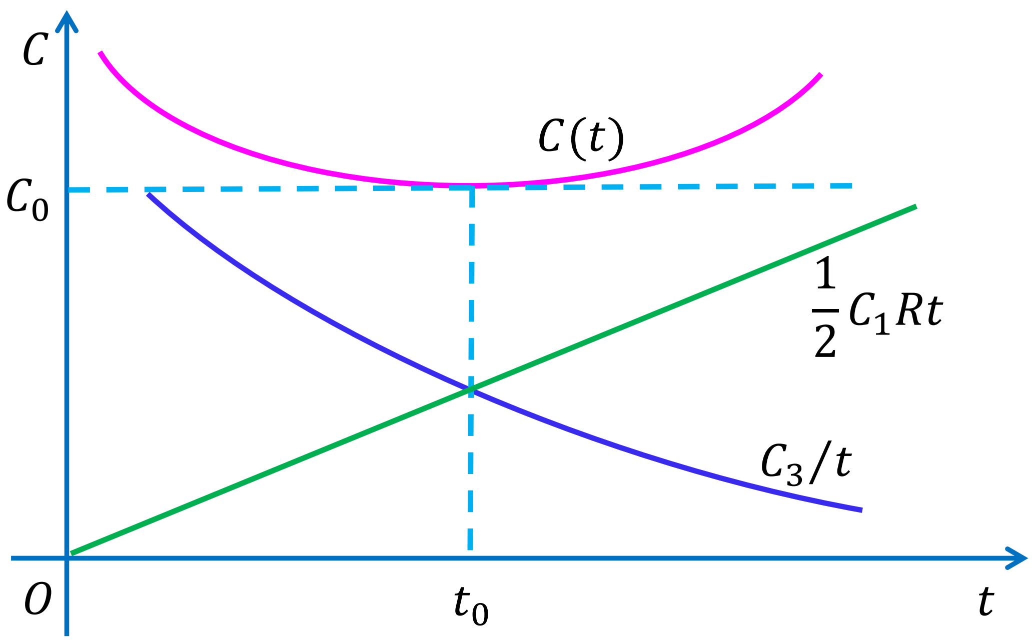
$$C(t) = \frac{C_3}{t} + \frac{1}{2}RtC_1$$

从而可得**最佳费用**：$C(t_0) = \sqrt{2C_1C_3R}$

  - 若选订货批量Q作为存储策略变量也可推导出上述公式。

模型1:不允许缺货，备货时间很短

- 备注
  - 模型1中，最佳费用也通过费用曲线求出，见下图：



费用曲线$C(t)$最低点的横坐标t_0与存储费用曲线和订购费用曲线交点横坐标相同。

模型1:不允许缺货，备货时间很短

- **例1** 某厂按合同每年需提供D个产品，不许缺货。假设每一周期工厂需装配费C_3元，存储费每年每单位产品为C_1元，问全年应分几批供货才能使装配费、存储费两者之和最小？
- **解**：

设全年分n批供货，则每批生产量 $Q=\frac{D}{n}$，供货周期为 $\frac{1}{n}$年。

每个周期内平均存储量为 $\frac{1}{2}Q$;

每个周期内的存储费用为 $C_1\frac{1}{2}Q\frac{1}{n}=\frac{C_1Q}{2n}$;

全年所需存储费用为 $\frac{C_1Q}{2n}n=\frac{C_1Q}{2}$;

全年所需装配费用为 $C_3n=C_3\frac{D}{Q}$;

全年总费用(以年为单位的平均费用)为 $C(Q)=C_1\frac{Q}{2}+C_3\frac{D}{Q}$.

模型1:不允许缺货，备货时间很短

- **解（续）**：

将$C(Q)=C_1\frac{Q}{2}+C_3\frac{D}{Q}$中的$Q$看做是连续变量，由

$$\frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{C_1}{2}-C_3\frac{D}{Q^2}=0$$

可得
$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3D}{C_1}}$$

即$\min C(Q)=C(Q_0)$，Q_0为经济订购批量。

最佳批次
$$n_0=\frac{D}{Q_0}=\sqrt{\frac{C_1D}{2C_3}}$$
（取近似的整数）

最佳周期
$$t_0=\frac{1}{n_0}=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1D}}$$

- **答**：全年应分n_0次供货可使费用最小。

模型1:不允许缺货，备货时间很短

- 备注
  - 例1中的D相当于模型1中的R，尽管例1与模型1在形式上有差别，但都反映了这类存储问题中各量之间的关系。可以利用模型1，直接求解例1（取时间单位为年）.
  - 模型1（例1）中，Q_0, t_0, n_0不一定为整数。
    - 假设$t_0 = 16.235$(天)，这时可以取$t_0 \cong 16$或$t_0 \cong 17$。
    - 为精确起见，可比较两者对应费用的大小，然后再决定取$t_0 = 16$还是$t_0 = 17$。

课堂练习

模型1:不允许缺货，备货时间很短

- **例2** 某轧钢厂按计划每月需产角钢30000吨，每吨每月需存储费53元，每次生产需调整机器设备等，共需装配费250000元。
  - 按计划，该厂每月生产角钢一次，生产批量为30000吨。
    - 每月需总费用：$53 \times \frac{1}{2} \times 30000 + 250000 = 1045000(元/月)$
    - 每年需总费用：$1045000 \times 12 = 12540000\ (元/年)$
  - 按EOQ公式计算，每次生产批量

    $Q_0 = \sqrt{2 \times C_3 \times R \div C_1} = \sqrt{2 \times 250000 \times 30000 \div 53} \cong 16823(吨)$

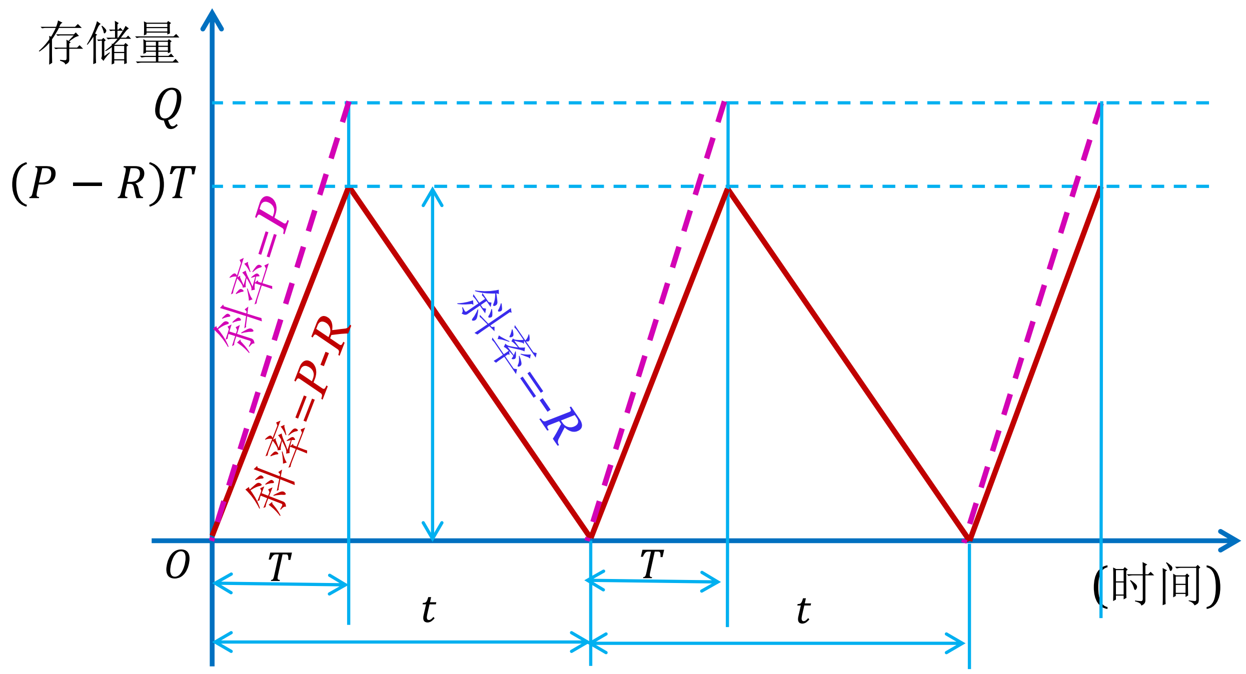
    全年生产批次$N_0 = n_0 \times 12 = \frac{R}{Q_0} \times 12 = \frac{30000 \times 12}{16823} \cong 21.4(次)$

    两次生产间隔的时间$T_0 = t_0 \times \frac{365}{12} = \frac{1}{n_0} \times \frac{365}{12} = 365/21.4 \cong 17(天)$
    - 17天的单位存储费为$\frac{53}{30} \times 17 \cong 30(元/吨)$
    - 一个生产周期共需费用$\frac{53}{30} \times 17 \times \frac{1}{2} \times 16823 + 250000 \cong 502562(元)$
    - 全年共需费用 $502562 \times 21.5 \cong 10806438(元/年)$ **(两年按43次计)**
  - **两者比较**，利用EOQ公式求出经济批量进行生产时，每年可节约资金

    $12540000 - 10806438 = 1733562(元)$

模型2:不允许缺货，生产需一定时间

- 模型假设
  - 本模型的假设条件，除生产需要一定时间的条件外，其余皆与**模型1**相同。



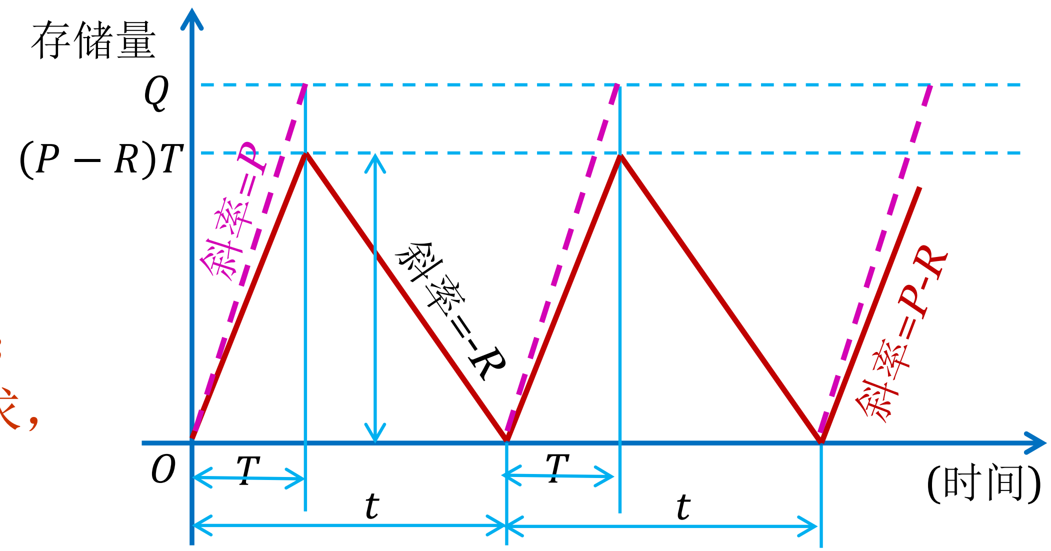
备注：此处的**模型2**即《运筹学基础及应用（第6版）》250页第2-4节的模型(这里*P*>*R*)。这里修改了《运筹学（第4版）》404页图14-5中的一个错误。

Haiyan Lu 5/21/2020
Jiangnan University

模型2:不允许缺货，生产需一定时间

- **解**:

设生产批量为Q，
所需生产时间为T，
则生产速度为$P = Q/T$。
已知需求速度为R $(R < P)$;
生产的产品一部分满足需求，
剩余部分才作为存储，
存储变化如右图所示。



在区间$[0,T]$内存储以速度$P-R$增加，在区间$[T,t]$内存储以速度R减少。
进入存储的最大数量$(P-R)T = R(t-T)$，故$PT = Rt$，从而$T = Rt/P$。
t时间内的平均存储量为 $\frac{1}{2}(P-R)T$，
t时间内所需存储费为 $\frac{1}{2}(P-R)TC_1t$，
t时间内所需装配费为 C_3，

模型2:不允许缺货，生产需一定时间

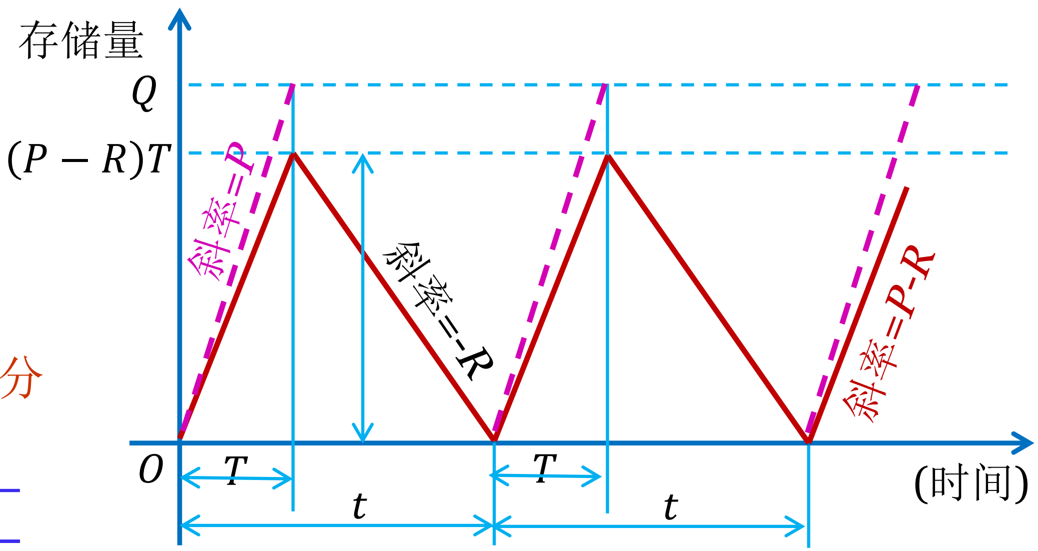
- **解（续）**：

单位时间总费用(平均费用)为

$$C(t)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}(P-R)TC_1t+C_3\right]$$

$$=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}(P-R)C_1\frac{Rt^2}{P}+C_3\right]$$

设$\min C(t)=C(t_0)$，利用微积分的方法可得：



最佳周期 $t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{P}{(P-R)}}$

最佳生产批量 $Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{P}{(P-R)}}$, $\min C(t)=C(t_0)=\sqrt{2C_1C_3R}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$

最佳生产时间 $T_0=\frac{Q_0}{P}=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{1}{P(P-R)}}$,

进入存储的最大数量 $(P-R)T_0=Q_0-RT_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$.

与模型1相比，模型2中t_0和Q_0的公式中增加了一个因子$\sqrt{\frac{P}{P-R}}$；当P相当大时，$\frac{P}{P-R}$趋近于1，两组公式就相同了。

Haiyan Lu 5/21/2020
Jiangnan University

模型2:不允许缺货，生产需一定时间

- **例3** 某厂每月需甲产品1000件，生产率为每月5000件，每批装配费为500元，每月每件产品存储费为20元，求EOQ及每次生产所需最低费用(装配费和存储费)。
- **解**:

已知$C_3=500$，$C_1=20$，$P=5000$，$R=1000$，将各值代入模型2中的公式，得到

$$\text{EOQ}=\sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}=\sqrt{\frac{2\times500\times1000\times5000}{20\times(5000-1000)}}=250(\text{件})$$

$$C_0=\sqrt{\frac{2C_1C_3R(P-R)}{P}}=\sqrt{\frac{2\times20\times500\times1000\times(5000-1000)}{5000}}=4000(\text{元})$$

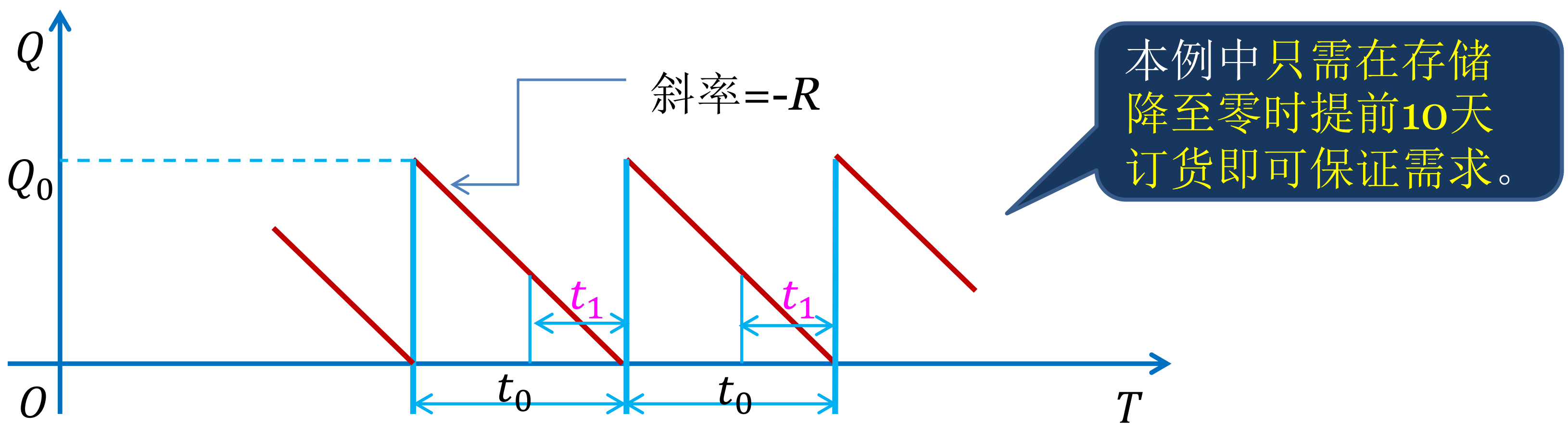
答：每次生产批量为250件，每次生产所需最低费用为4000元。

模型2:不允许缺货，生产需一定时间

- **例4** 某商店经销甲商品成品单价为500元，年存储费用为成本的20%，年需求量为365件，需求速度为常数。甲商品的订购费为20元，**提前期为10天**，求EOQ及最低费用。
- **解**:

  从表面来看，此例似乎应按**模型2**处理，因为**拖后时间**似乎与**生产需一定时间**意义差不多。

  但本质上本例与**模型1**完全相同，本例中存储变化情况见下图：



模型2:不允许缺货，生产需一定时间

- **解（续）**：

由**模型1**，得到

$$\text{EOQ}=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\frac{2\times20\times365}{500\times20\%}}\cong 12(\text{单位})$$

最低费用 $C_0=\sqrt{2C_1C_3R}=\sqrt{2\times100\times20\times365}\cong 1208(\text{元})$

（不含商品成本费）。

由于提前期为10天，10天内的需求为10单位甲商品，故**只要当存储降至10就要订货**。

模型2:不允许缺货，生产需一定时间

- 备注
  - 一般地，设 t_1 为**提前期**，R 为需求速度，若**订货策略**为：当存储降至$L = Rt_1$时即订货，则称L为**订购点**（也称为**订货点**）。
  - **例4**中并没有求出最佳订货周期t_0（可通过$t_0 = Q_0/R$求出），只求出订货点L，这时的**存储策略**为：不考虑订货周期t_0，只要存储降至L即订货，订货量为Q_0，称这种存储策略为**定点订货**。
  - 相对地，称每隔t_0时间订货一次为**定时订货**，每次订货量不变为**定量订货**。

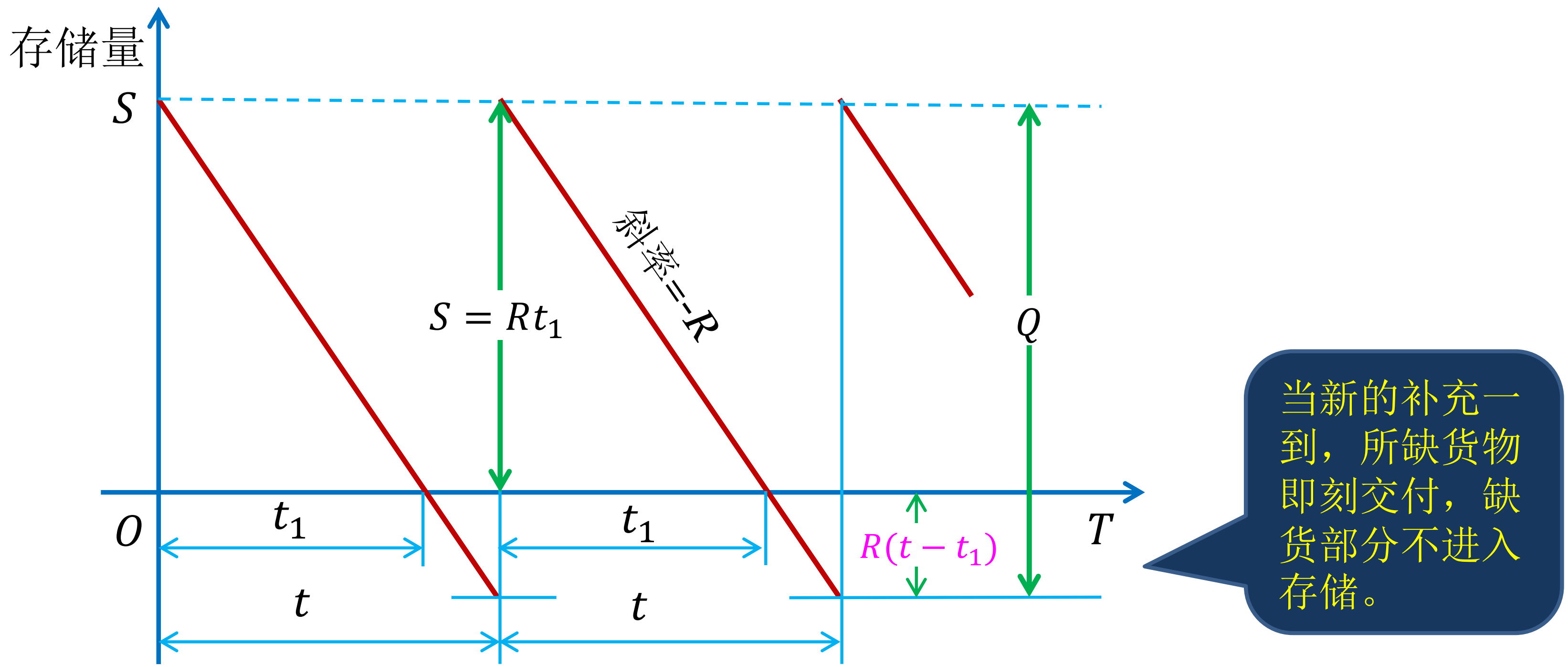
模型3:允许缺货(需补足)，备货时间很短

- 模型假设
  - 本模型的假设条件除**允许缺货**外，其余皆与**模型1**相同。
- 备注
  - 由于允许缺货，所以企业可在存储降至零后，再等一段时间，然后订货。这样，企业可以少付几次订货的固定费用，少付一些存储费用。
  - 一般地，当顾客遇到缺货时（缺货后可以延期付货）不受损失或损失很小，而企业除支付少量缺货费外也无其他损失，这时发生缺货现象对企业可能是有利的。
  - 这里**模型3**即《运筹学基础及应用》**249**页第**2-3**节的模型。

模型3:允许缺货(需补足)，备货时间很短

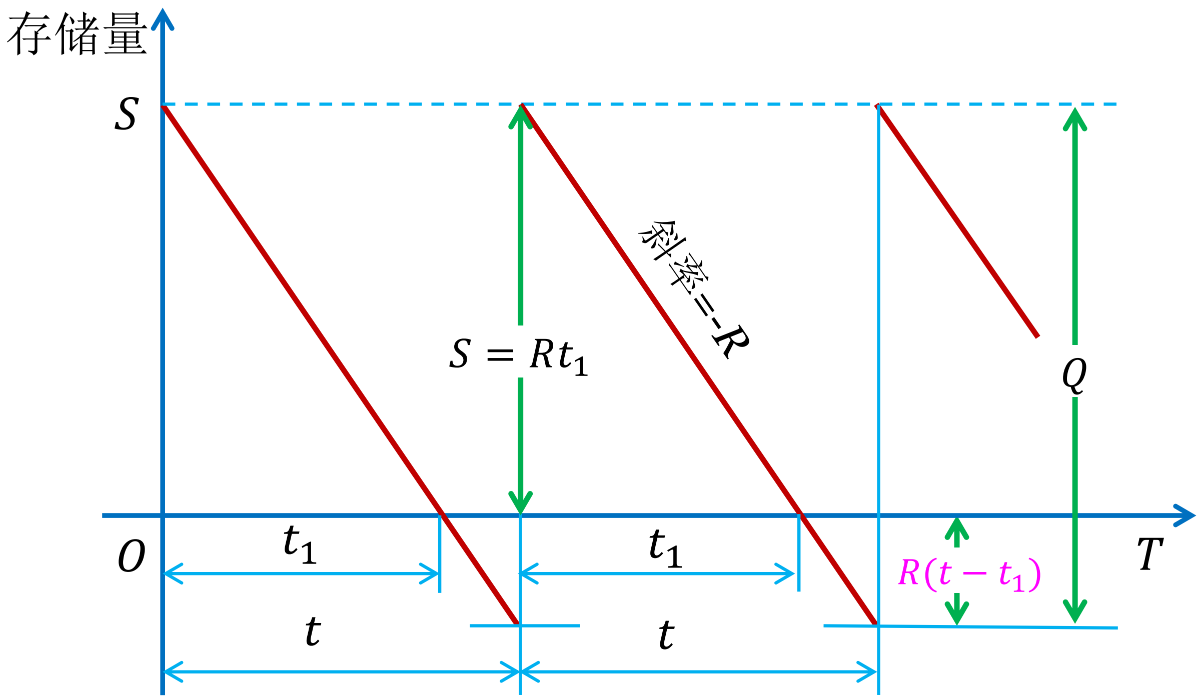
- 题设：

单位时间单位物品存储费用为C_1，缺货费为C_2（单位时间单位物品缺货损失费），每次订购费为C_3，需求速度为R。求最佳存储策略，使平均总费用最小(见下图)。



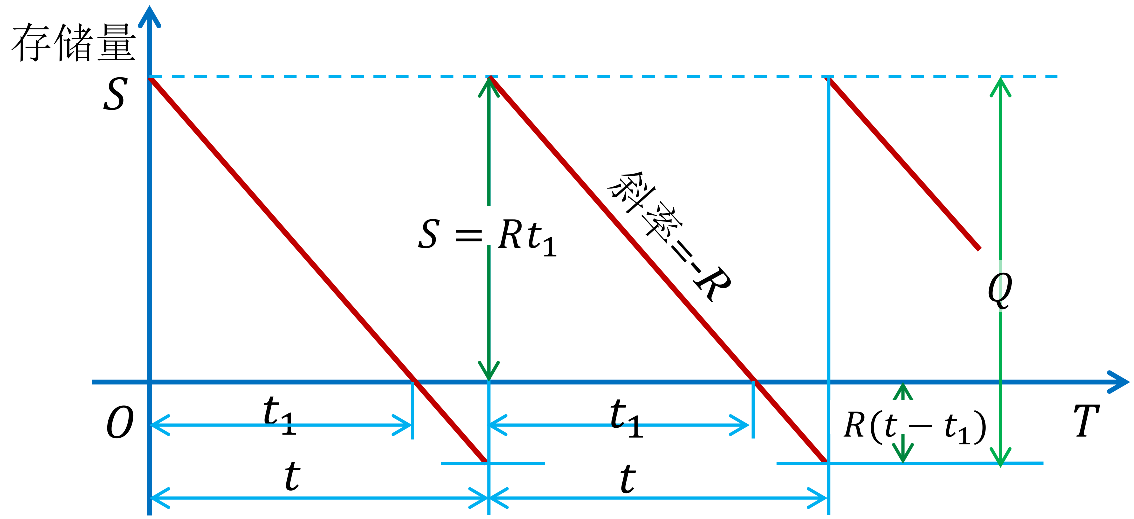
模型3:允许缺货(需补足)，备货时间很短

- **解**:
  设最初存储量为S，可满足t_1时间内的需求。t_1时间内平均存储量为$\frac{1}{2}S$; $(t-t_1)$时间内存储量为零, 平均缺货量为$\frac{1}{2}R(t-t_1)$.



模型3:允许缺货(需补足)，备货时间很短

- **解(续)**:



由于S仅能满足t_1时间的需求，故$S=Rt_1$，从而$t_1=S/R$.

在t时间内需**存储费** $C_1\frac{1}{2}St_1=\frac{1}{2}C_1\frac{S^2}{R}$

在t时间内的**缺货费** $C_2\frac{1}{2}R(t-t_1)(t-t_1)=\frac{1}{2}C_2\frac{(Rt-S)^2}{R}$

在t时间内的**订购费** C_3

平均总费用(单位时间总费用) $C(t,S)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1\frac{S^2}{R}+\frac{1}{2}C_2\frac{(Rt-S)^2}{R}+C_3\right].$

模型3:允许缺货(需补足)，备货时间很短

- **解(续)**:

利用多元函数求极值的方法，求

$$C(t,S)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1\frac{S^2}{R}+\frac{1}{2}C_2\frac{(Rt-S)^2}{R}+C_3\right]$$

的最小值.

由 $\frac{\partial C}{\partial S}=\frac{1}{t}\left[C_1\frac{S}{R}-C_2\frac{Rt-S}{R}\right]=0, R\neq 0, t\neq 0, C_1S-C_2(Rt-S)=0$

得 $$S=\frac{C_2Rt}{C_1+C_2}$$

由 $\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{1}{t^2}\left[C_1\frac{S^2}{2R}+C_2\frac{(Rt-S)^2}{2R}+C_3\right]+\frac{1}{t}[C_2(Rt-S)]=0, R\neq 0, t\neq 0$

得 $$-C_1\frac{S^2}{2}-C_2\frac{(Rt-S)^2}{2}-C_3R+Rt[C_2(Rt-S)]=0$$

将 $S=\frac{C_2Rt}{C_1+C_2}$ 代入上式，消去 S, 依次求得下述结果:

模型3:允许缺货(需补足)，备货时间很短

- **解(续)**：

最佳周期 $t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{RC_1}}\sqrt{\frac{(C_1+C_2)}{C_2}}$

最大存储量 $S_0=\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}}\sqrt{\frac{C_2}{(C_1+C_2)}}$

最低平均总费用 $\min C(t,S)=C_0(t_0,S_0)=\sqrt{2RC_1C_3}\sqrt{\frac{C_2}{(C_1+C_2)}}$

最佳订货量 $Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$

最大缺货量 $Q_0-S_0=\sqrt{\frac{2RC_1C_3}{C_2(C_1+C_2)}}$

在允许缺货条件下，**最佳存储策略为**:

每隔时间t_0订货一次，订货量为Q_0，用Q_0中的一部分Q_0-S_0补**足所缺货物**，剩余部分 S_0进入存储。

Haiyan Lu 5/21/2020
Jiangnan University

模型3:允许缺货(需补足)，备货时间很短

- 备注
  - 对于模型3，当缺货费C_2很大时(此时不允许缺货)，即

$$C_2 \to \infty, \qquad \frac{C_2}{C_1 + C_2} \to 1$$

则 $t_0 \cong \sqrt{\frac{2C_3}{RC_1}}$, $S_0 \cong \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}}$, $C_0 \cong \sqrt{2RC_1C_3}$

此时与**模型1**中的公式相同。

  - 模型3（允许缺货）中最佳周期$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{RC_1}}\sqrt{\frac{(C_1+C_2)}{C_2}}$为模型1（不允许缺货）中最佳周期的$\sqrt{\frac{(C_1+C_2)}{C_2}}$倍，又$\frac{C_2}{C_1+C_2} > 1$，故两次订货间隔时间延长了。

模型3:允许缺货(需补足)，备货时间很短

- **例5** 已知需求速度$R=1000$件，单位时间单位物品存储费用为$C_1=40$元，单位物品缺货费为$C_2=15$元，每次订购费为$C_3=500$元，求S_0和C_0。

- **解**:
  由**模型3**中的计算公式，可得

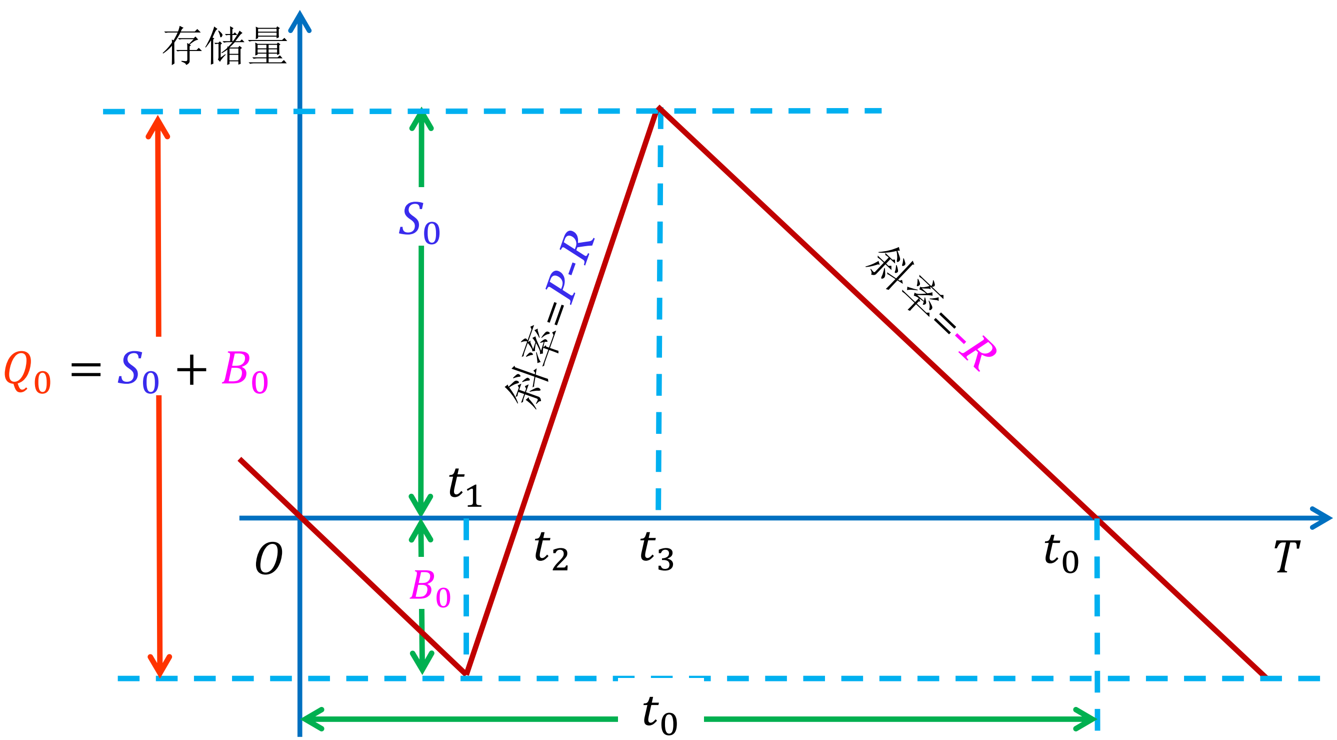
$$S_0=\sqrt{\frac{2RC_3C_2}{C_1(C_1+C_2)}}=\sqrt{\frac{2\times1000\times500\times15}{40\times(40+15)}}\cong 83(件)$$

$$C_0=\sqrt{\frac{2C_1C_2C_3R}{C_1+C_2}}=\sqrt{\frac{2\times40\times15\times500\times1000}{40+15}}\cong 3302.89(元)$$

答：$S_0\cong 83$件，$C_0\cong 3302.89$元。

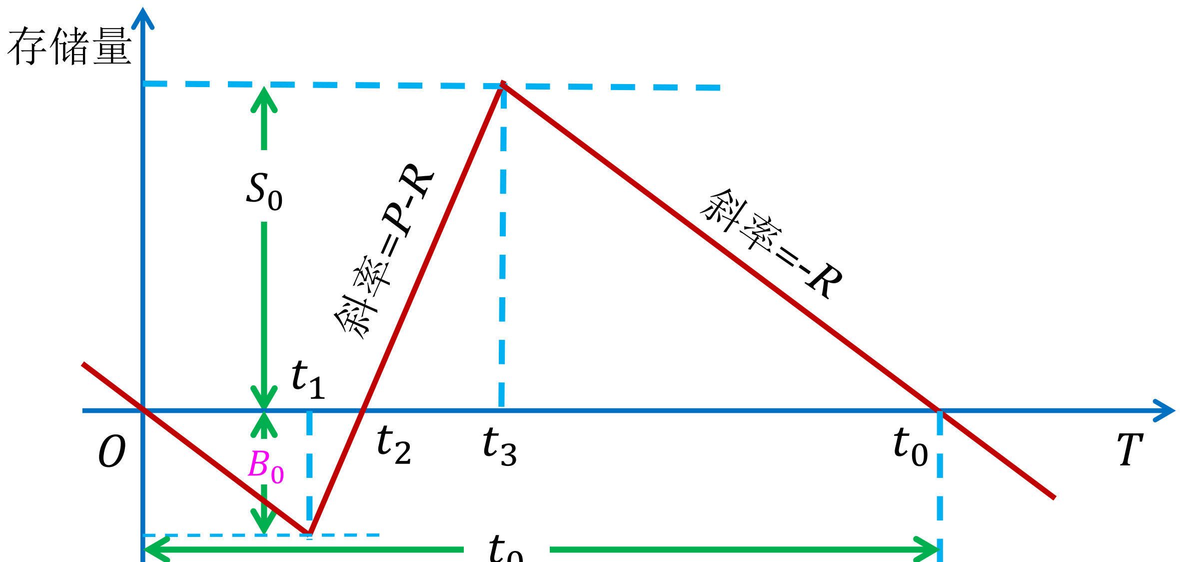
模型4:允许缺货(需补足)，生产需一定时间

- 模型假设
  - 本模型的假设条件除**允许缺货、生产需一定时间**外，其余皆与**模型1**相同。存储变化情况见下图。



模型4:允许缺货(需补足)，生产需一定时间

- **解:**



取$[0,t]$为一个周期，设t_1时刻开始生产。

$[0,t_2]$时间内存储为零，设B为最大缺货量。

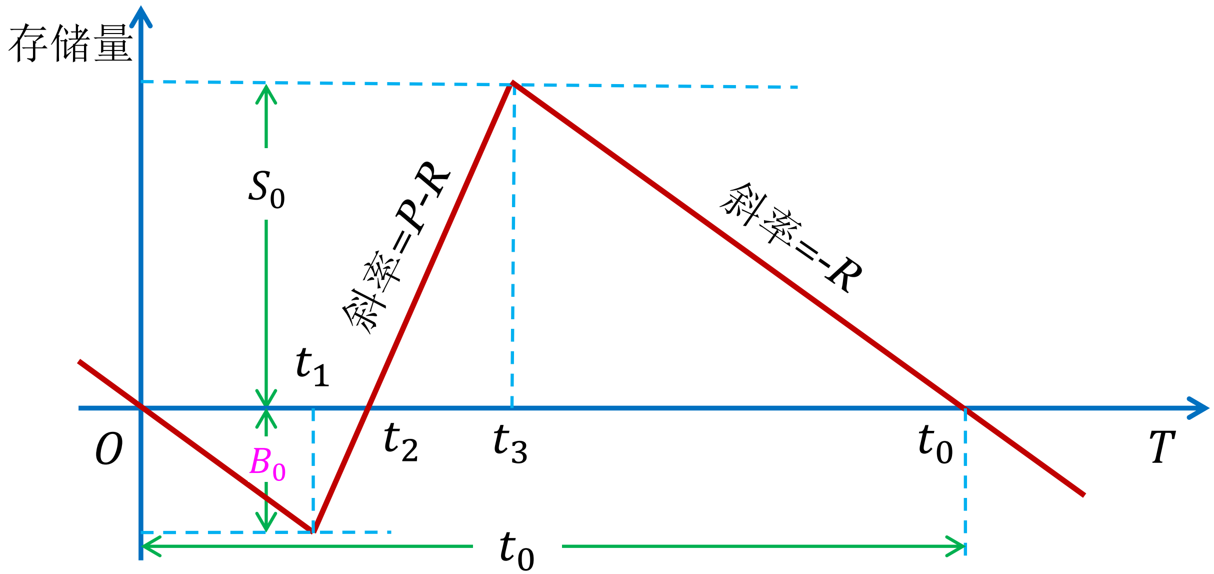
$[t_1,t_2]$时间内除满足需求外，需补足$[0,t_1]$时间内的缺货。

S表示存储量，t_3时刻存储量达到最大，t_3时刻停止生产。

$[t_3,t]$时间存储量以需求速度R减少。

模型4:允许缺货(需补足)，生产需一定时间

- **解(续)：**



由上图易知:

最大缺货量 $B = Rt_1$，亦有 $B = (P-R)(t_2 - t_1)$.

即 $Rt_1 = (P-R)(t_2 - t_1)$，故 $t_1 = \frac{P-R}{P} t_2$.

最大存储量 $S = (P-R)(t_3 - t_2)$，亦有 $S = R(t - t_3)$.

即 $(P-R)(t_3 - t_2) = R(t - t_3)$，故 $t_3 = \frac{R}{P} t + \left(1 - \frac{R}{P}\right) t_2$

或 $t_3 - t_2 = \frac{R}{P}(t - t_2)$.

模型4:允许缺货(需补足)，生产需一定时间

- **解(续)**:

  $[0,t]$时间内所需费用有：

  存储费: $\frac{1}{2}S(t-t_2)C_1=\frac{1}{2}C_1(P-R)(t_3-t_2)(t-t_2)$

  $=\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{R}{P}(t-t_2)^2$

  缺货费: $\frac{1}{2}Bt_2C_2=\frac{1}{2}C_2Rt_1t_2=\frac{1}{2}C_2R\frac{(P-R)}{P}t_2^2$

  装配费: C_3

  $[0,t]$时间内总平均费用为：

  $$C(t,t_2)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{R}{P}(t-t_2)^2+\frac{1}{2}C_2R\frac{(P-R)}{P}t_2^2+C_3\right]$$

  求偏导数，并令$\frac{\partial C(t,t_2)}{\partial t}=0$，$\frac{\partial C(t,t_2)}{\partial t_2}=0$，解得

  $$t=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$，可记作t_0

  $$t_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}t_0=\frac{C_1}{C_1+C_2}\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

模型4:允许缺货(需补足)，生产需一定时间

- **解(续)：**

  相应地得到

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$S_0=R(t_0-t_3)=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

$$B_0=Rt_1=\sqrt{\frac{2C_1C_3R}{(C_1+C_2)C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

$$C_0=\min C(t,t_2)=C(t,t_2)\Big|_{\substack{t=t_0\\ t_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}t_0}}=\sqrt{2C_1C_3R}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

Haiyan Lu
Jiangnan University

模型4:允许缺货(需补足)，生产需一定时间

- **备注**
  - 注意模型1、模型2、模型3、模型4的存储策略（最佳周期t_0、最佳订货量Q_0、最大存储量S_0）之间的差别与内在联系。
  - 这四个模型中，可以验证，相应存储策略均满足如下关系式：

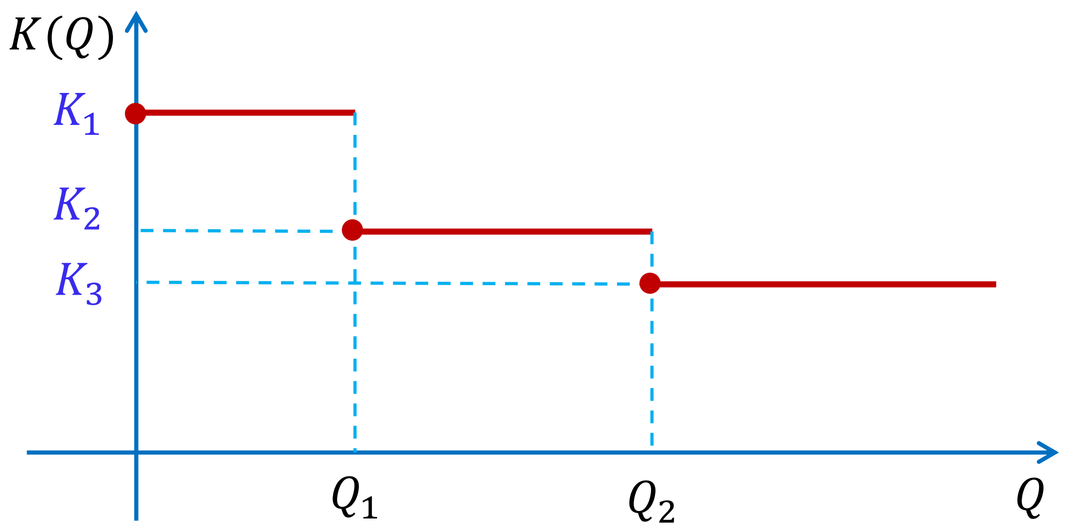
$$\frac{1}{2}S_0 t_0 = \frac{C_3}{C_1}$$

价格有折扣的存储问题

- 模型概述
  - 以上**模型1~4**所讨论的货物单价是常量，得出的存储策略都与货物单价无关。
  - 下面介绍货物单价随订购（生产）数量而变化时的存储策略。
    - 一种商品常会有**零售价**、**批发价**和**出厂价**，购买同一种商品的数量不同，商品单价也不同。
      - 一般情况下，购买数量越多，商品单价越低。
      - 在少数情况下，某种商品限量供应，超过限额部分的商品单价要提高。
    - 除去货物单价随订购数量而变化外，其余条件皆与**模型1**的假设相同时，应如何制定相应的存储策略？

价格有折扣的存储问题

- **解**：
  记货物单价为$K(Q)$,（不妨）设$K(Q)$按三个数量等级变化(见下图)：



$$K(Q)=\begin{cases}K_1, & 0\le Q<Q_1\\ K_2, & Q_1\le Q<Q_2\\ K_3, & Q_2\le Q\end{cases}\qquad (K_1>K_2>K_3)$$

价格有折扣的存储问题

- **解（续）**：

当订购量为Q时，一个周期内所需费用为：

$$\frac{1}{2}C_1Q\frac{Q}{R}+C_3+K(Q)Q=\begin{cases}\frac{1}{2}C_1Q\frac{Q}{R}+C_3+K_1Q, Q\in[0,Q_1)\\ \frac{1}{2}C_1Q\frac{Q}{R}+C_3+K_2Q, Q\in[Q_1,Q_2)\\ \frac{1}{2}C_1Q\frac{Q}{R}+C_3+K_3Q, Q\in[Q_2,+\infty)\end{cases}$$

一个周期内平均每单位货物所需费用为:

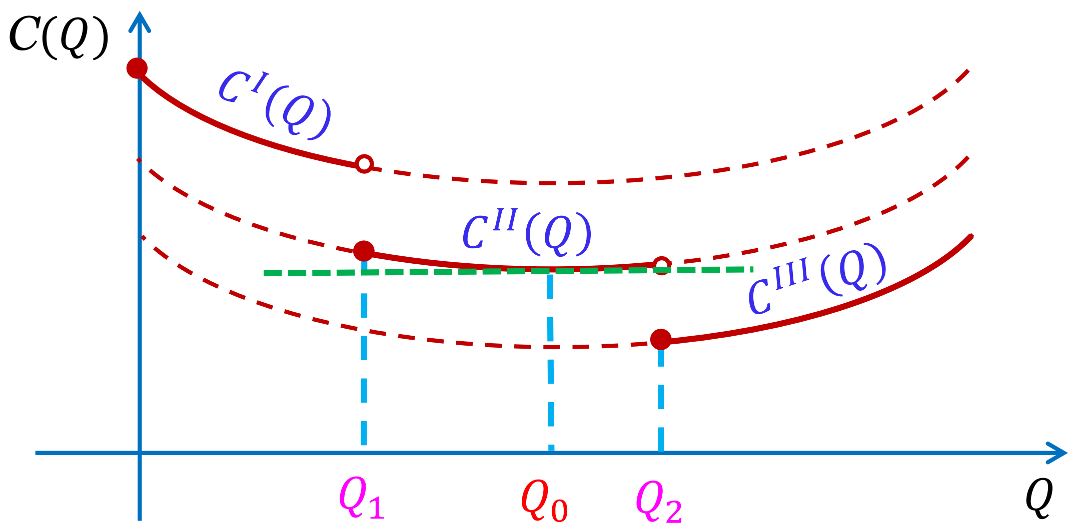
$$\frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R}+\frac{C_3}{Q}+K(Q)=\begin{cases}C^{I}(Q)=\frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R}+\frac{C_3}{Q}+K_1, Q\in(0,Q_1)\\ C^{II}(Q)=\frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R}+\frac{C_3}{Q}+K_2, Q\in[Q_1,Q_2)\\ C^{III}(Q)=\frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R}+\frac{C_3}{Q}+K_3, Q\in[Q_2,+\infty)\end{cases}$$

- 如果不考虑$C^{I}(Q)$、$C^{II}(Q)$、$C^{III}(Q)$的定义域，它们之间只差一个常数，因此它们的导函数相同。但是，由导数为零的点Q_0所在的区间所确定的费用未必是使得费用最小的订购量。

价格有折扣的存储问题

- **解（续）**：

  一个周期内平均每单位货物所需费用，如下图所示：



若 $C^I(Q)$、$C^{II}(Q)$、$C^{III}(Q)$ 的定义域相同，则它们之间只差一个常数。

价格有折扣的存储问题

- **解（续）：**

设所求最佳订购批量为Q^*，在给出价格有折扣情况下，求解步骤为：

(1) 对 $C^I(Q)$（不考虑其定义域）求得极值点 Q_0，即：先不考虑价格优惠，按模型1，求出经济订货批量Q_0.

(2) 若$Q_0 < Q_1$，计算

$$C^I(Q_0) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_0}{R} + \frac{C_3}{Q_0} + K_1$$

$$C^{II}(Q_1) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_1}{R} + \frac{C_3}{Q_1} + K_2$$

$$C^{III}(Q_2) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_2}{R} + \frac{C_3}{Q_2} + K_3$$

由$\min\{C^I(Q_0), C^{II}(Q_1), C^{III}(Q_2)\}$，得到单位货物最小费用的订购批量$Q^*$.

(3) 若$Q_1 \le Q_0 < Q_2$，计算$C^{II}(Q_0)$、$C^{III}(Q_2)$，由$\min\{C^{II}(Q_0), C^{III}(Q_2)\}$，确定$Q^*$.

(4) 若$Q_2 \le Q_0$，则取$Q^* = Q_0$.

- **备注**：以上步骤易推广到价格折扣分m个等级的情况。

价格有折扣的存储问题

- **例6** 某厂每年需某种元件30000个，每次订购费$C_3 = 1000$元，保管费每件每年$C_1 = 100$元，不允许缺货。元件单价随采购数量不同而有变化：

$$K(Q) = \begin{cases} 200(\text{元}), & Q < 1500 \\ 198(\text{元}), & 1500 \le Q \end{cases}$$

求最佳订购量。

- **解**：

首先由EOQ公式，计算得到

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2\times1000\times30000}{100}} \cong 775 < Q_1 = 1500$$

分别计算每次订购775个和1500个元件时平均单位元件所需费用：

$$C^I(Q_0) = C^I(775) = \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{775}{30000} + \frac{1000}{775} + 200 \cong 202.582(\text{元/个})$$

$$C^{II}(Q_1) = C^{II}(1500) = \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{1500}{30000} + \frac{1000}{1500} + 198 \cong 201.167(\text{元/个})$$

由于$C^{II}(1500) < C^I(775)$，可得最佳订购量$Q^* = Q_1 = 1500$(个)。

Thank you!

谢 谢！