动态规划

第八章

动态规划与静态规划的关系

第4节

动态规划与静态规划

- 数学规划
  - 线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划均为数学规划，其本质为求极值的问题，可用迭代法逐步求解。
- 静态规划
  - 线性规划、非线性规划、整数规划问题通常与时间无关，故又称为静态规划。
- 化静态规划为动态规划
  - 对于某些静态规划问题，可以人为地引入时间因素，将静态规划问题看做是按阶段进行的动态规划问题，因此使动态规划方法成为求解某些线性、非线性及整数规划问题的有效方法。

用动态规划方法求解静态规划

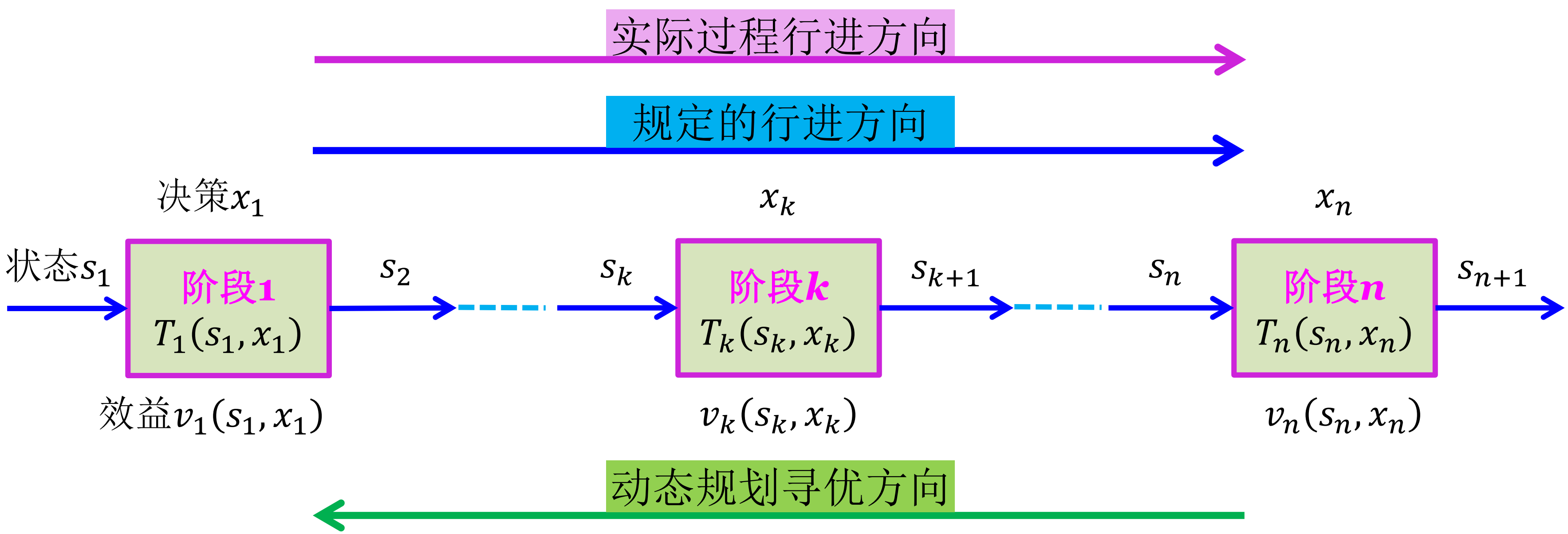
- 主要步骤
  - 把依次决定各个变量的取值看做是一个多阶段决策过程，因此变量的个数即为阶段数。
  - 约束条件右端项表明可分配的资源量，用状态变量表示，约束条件的个数即为状态变量的维数。
  - 求解的关键在于正确写出动态规划的基本方程(即递推关系式)，有逆序和顺序两种递推方式。
    - 逆序解法和顺序解法本质相同。
    - 一般而言：

      当初始状态给定时，用逆序解法比较方便；

      当终止状态给定时，用顺序解法比较方便。

用动态规划方法求解静态规划

- 逆序解法



其中$x_k = x_k(s_k)$, $s_{k+1} = T_k(s_k, x_k)$, $k = n, n-1, \dots, 1$;
$V_{1,n} = v_1(s_1,x_1) * v_2(s_2,x_2) * \cdots * v_n(s_n,x_n)$, 求$\text{opt}V_{1,n}$.
这里 “*” 全为 “+” 或全为 “×” , “opt”为“max”或“min”.

用动态规划方法求解静态规划

- 逆序解法
  - 设已知初始状态s_1，并设$f_k(s_k)$表示第k阶段的初始状态为s_k，从阶段k到阶段n所得到的最大效益(也可设为最小费用)。
  - 阶段n：$f_n(s_n) = \max\limits_{x_n \in D_n(s_n)} [v_n(s_n, x_n) * f_{n+1}(s_{n+1})]$, 解此一维极值问题，得到最优解$x_n = x_n(s_n)$和最优值$f_n(s_n)$.
  - 阶段$n-1$： $f_{n-1}(s_{n-1}) = \max\limits_{x_{n-1} \in D_{n-1}(s_{n-1})} [v_{n-1}(s_{n-1}, x_{n-1}) * f_n(s_n)]$, 其中 $s_n = T_{n-1}(s_{n-1}, x_{n-1})$, 解得最优解$x_{n-1} = x_{n-1}(s_{n-1})$和最优值$f_{n-1}(s_{n-1})$.
  - 阶段k： $f_k(s_k) = \max\limits_{x_k \in D_k(s_k)} [v_k(s_k, x_k) * f_{k+1}(s_{k+1})]$,其中 $s_{k+1} = T_k(s_k, x_k)$, 解得最优解$x_k = x_k(s_k)$和最优值$f_k(s_k)$.
  - 阶段1：$f_1(s_1) = \max\limits_{x_1 \in D_1(s_1)} [v_1(s_1, x_1) * f_2(s_2)]$，其中 $s_2 = T_1(s_1, x_1)$, 解得最优解$x_1 = x_1(s_1)$和最优值$f_1(s_1)$.
  - 由于初始状态s_1已知，故$x_1 = x_1(s_1)$和$f_1(s_1)$可随之确定；依此类推，按与上述递推过程相反的顺序推算可逐步确定每段的决策和效益。

用动态规划方法求解静态规划

- 例3 用**逆序解法**求解下述问题

$$\max z = x_1 x_2^2 x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \ \ (c > 0) \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

- 解：将问题按变量个数划分为3个阶段。取问题中的变量x_1, x_2, x_3为决策变量，取第k阶段初约束条件右端项(资源)的剩余值为状态变量s_k，显然$s_1 = c$ (**初始状态已知**)。令$f_k(s_k)$表示第k阶段的初始状态为s_k，从阶段k到阶段3所得到的最大值。因此有(状态转移方程)：

$$s_2 = s_1 - x_1, s_3 = s_2 - x_2, s_4 = s_3 - x_3$$

确定决策变量的取值范围(允许决策集合)：

$$0 \leq x_1 \leq s_1 (= c), 0 \leq x_2 \leq s_2, x_3 = s_3$$

(计算可知$s_4 = 0$；取边界条件为$f_4(s_4) = 1$)

Haiyan Lu
Jiangnan University

用动态规划方法求解静态规划

- **解**：采用**逆序解法**，由后向前递推，依次有

$$f_3(s_3)=\max_{x_3=s_3}[x_3 f_4(s_4)]=s_3,\ x_3^*=s_3;$$

$$f_2(s_2)=\max_{0\le x_2\le s_2}[x_2^2 f_3(s_3)]=\max_{0\le x_2\le s_2}[x_2^2 s_3]$$

$$=\max_{0\le x_2\le s_2}[x_2^2(s_2-x_2)]=\max_{0\le x_2\le s_2}[h_2(s_2,x_2)]$$

由$\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}x_2}=2x_2s_2-3x_2^2=0$，得$x_2=\frac{2}{3}s_2$和$x_2=0$(舍去),

又$\frac{\mathrm{d}^2h_2}{\mathrm{d}x_2^2}=2s_2-6x_2$，而$\left.\frac{\mathrm{d}^2h_2}{\mathrm{d}x_2^2}\right|_{x_2=\frac{2}{3}s_2}=-2s_2<0$，故

$x_2=\frac{2}{3}s_2$为极大值点，因此$f_2(s_2)=\frac{4}{27}s_2^3,\ x_2^*=\frac{2}{3}s_2;$

用动态规划方法求解静态规划

- **解**：$f_1(s_1) = \max\limits_{0\le x_1\le s_1}[x_1 f_2(s_2)] = \max\limits_{0\le x_1\le s_1}\left[x_1 \frac{4}{27} s_2^3\right]$

$$= \max_{0\le x_1\le s_1}\left[x_1 \frac{4}{27}(s_1 - x_1)^3\right] = \max_{0\le x_1\le s_1} h_1(s_1, x_1)$$

同样按微分法求解，得$x_1^* = \frac{1}{4}s_1, f_1(s_1) = \frac{1}{64}s_1^4$;

反推求得各阶段的最优决策和最优值：

由$s_1 = c$，得$x_1^* = \frac{1}{4}c, f_1(s_1) = \frac{1}{64}c^4$;

由$s_2 = s_1 - x_1^* = \frac{3}{4}c$，得$x_2^* = \frac{2}{3}s_2 = \frac{1}{2}c, f_2(s_2) = \frac{1}{16}c^3$;

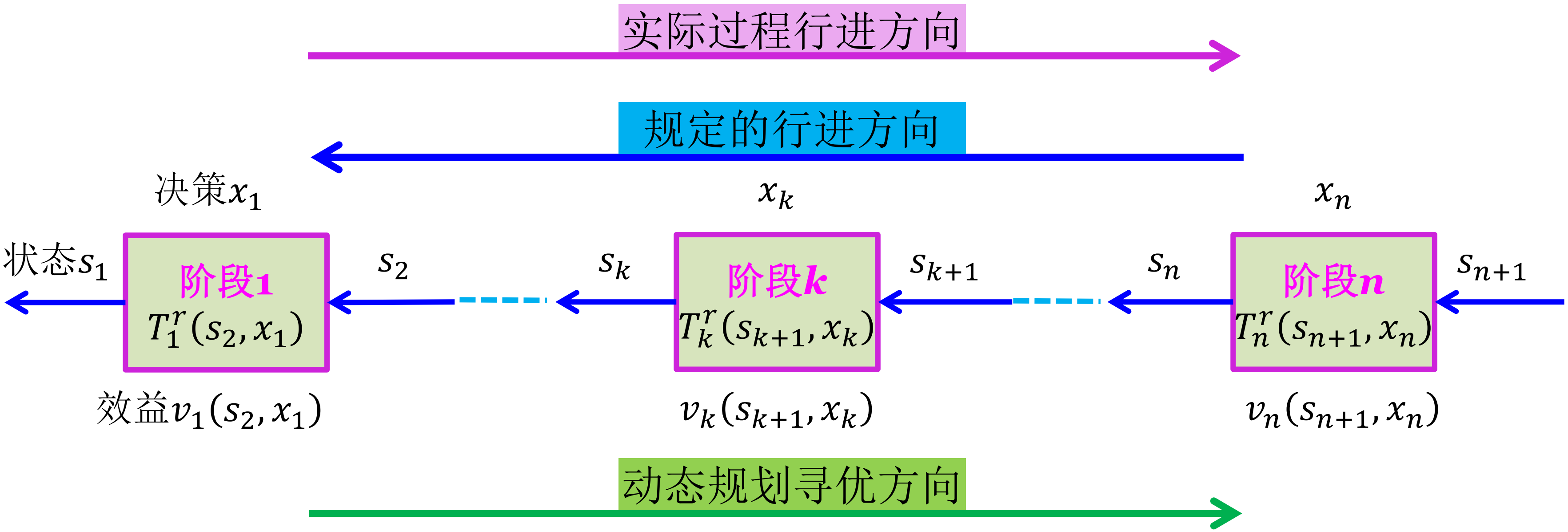
由$s_3 = s_2 - x_2^* = \frac{3}{4}c - \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}c$，得$x_3^* = \frac{1}{4}c, f_3(s_3) = \frac{1}{4}c$.

因此得到：最优解为 $x_1^* = \frac{1}{4}c, x_2^* = \frac{1}{2}c, x_3^* = \frac{1}{4}c$;

最优值为 $\max z = f_1(s_1) = \frac{1}{64}c^4$.

用动态规划方法求解静态规划

- 顺序解法



其中$x_k = x_k(s_{k+1}), s_k = T_k^r(s_{k+1},x_k), k = 1,2,\dots,n;$

$V_{1,n} = v_1(s_2,x_1) * v_2(s_3,x_2) * \cdots * v_n(s_{n+1},x_n)$, 求$\mathrm{opt}V_{1,n}$.

这里“*”全为“+”或全为“×”, “opt”为“max”或“min”.

用动态规划方法求解静态规划

- 顺序解法
  - 设已知终止状态s_{n+1}，并设$f_k(s_{k+1})$表示第k阶段的结束状态为s_{k+1}，从阶段1到阶段k所得到的最大效益(也可设为最小费用)。
  - 阶段1：$f_1(s_2)=\max\limits_{x_1\in D_1(s_2)}[v_1(s_2,x_1)*f_0(s_1)]$, 其中 $s_1=T_1^r(s_2,x_1)$, 解得最优解$x_1=x_1(s_2)$和最优值$f_1(s_2)$.
  - 阶段2：$f_2(s_3)=\max\limits_{x_2\in D_2(s_3)}[v_2(s_3,x_2)*f_1(s_2)]$, 其中 $s_2=T_2^r(s_3,x_2)$, 解得最优解$x_2=x_2(s_3)$和最优值$f_2(s_3)$.
  - 阶段k：$f_k(s_{k+1})=\max\limits_{x_k\in D_k(s_{k+1})}[v_k(s_{k+1},x_k)*f_{k-1}(s_k)]$，其中 $s_k=T_k^r(s_{k+1},x_k)$, 解得最优解$x_k=x_k(s_{k+1})$和最优值$f_k(s_{k+1})$.
  - 阶段n：$f_n(s_{n+1})=\max\limits_{x_n\in D_n(s_{n+1})}[v_n(s_{n+1},x_n)*f_{n-1}(s_n)]$，其中 $s_n=T_n^r(s_{n+1},x_n)$, 解得最优解$x_n=x_n(s_{n+1})$和最优值$f_n(s_{n+1})$.
  - 由于终止状态s_{n+1}已知，故$x_n=x_n(s_{n+1})$和$f_n(s_{n+1})$可随之确定；依此类推，按与上述递推过程相反的顺序推算可逐步确定每段的决策和效益。

用动态规划方法求解静态规划

- **例4** 用顺序解法求解**例3**中的问题

$$\max z = x_1 x_2^2 x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \ \ (c > 0) \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

- **解**：将问题按变量个数划分为3个阶段。取问题中的变量x_1, x_2, x_3为决策变量，取第k阶段末约束条件右端项(已分配的资源)的累计值为状态变量s_{k+1}，显然$s_4 = c$(终止状态已知)。令$f_k(s_{k+1})$表示第k阶段的结束状态为s_{k+1}，从阶段1到阶段k所得到的最大值。因此有(状态转移方程)：

$$s_1 = s_2 - x_1, s_2 = s_3 - x_2, s_3 = s_4 - x_3$$

确定决策变量的取值范围(允许决策集合)：

$$x_1 = s_2, 0 \leq x_2 \leq s_3, 0 \leq x_3 \leq s_4$$

(计算可知$s_1 = 0$；取边界条件为$f_0(s_1) = 1$)

用动态规划方法求解静态规划

- **解**：采用**顺序解法**，由前向后递推，依次有

$$f_1(s_2) = \max_{x_1=s_2}[x_1 f_0(s_1)] = \max_{x_1=s_2}[x_1] = s_2, x_1^* = s_2;$$

$$f_2(s_3) = \max_{0\le x_2\le s_3}[x_2^2 f_1(s_2)] = \max_{0\le x_2\le s_3}[x_2^2 s_2] = \max_{0\le x_2\le s_3}[x_2^2(s_3-x_2)]$$

$$= \frac{4}{27}s_3^3, x_2^* = \frac{2}{3}s_3;$$

$$f_3(s_4) = \max_{0\le x_3\le s_4}[x_3 f_2(s_3)] = \max_{0\le x_3\le s_4}\left[x_3\frac{4}{27}s_3^3\right]$$

$$= \max_{0\le x_3\le s_4}\left[x_3\frac{4}{27}(s_4-x_3)^3\right] = \frac{1}{64}s_4^4, x_3^* = \frac{1}{4}s_4;$$

由于已知$s_4 = c$，反推求得：

最优解为 $x_1^* = \frac{1}{4}c, x_2^* = \frac{1}{2}c, x_3^* = \frac{1}{4}c;$

最优值为 $\max z = f_3(s_4) = \frac{1}{64}c^4.$

用动态规划方法求解静态规划

考虑用
顺序解法

- **例5** 用动态规划方法求解下述问题

$$\max z = 4x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 12$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

- **解**：将问题按变量个数划分为3个阶段。取问题中的变量x_1, x_2, x_3为决策变量，取第k阶段末约束条件右端项(已分配的资源)的累积值为状态变量s_k，显然 $s_3 \leq 9$（终止状态的范围已知）。令$f_k(s_k)$表示第k阶段的结束状态为s_k，从阶段1到阶段k所得到的最大值。因此有(状态转移方程)：

$$s_0 = s_1 - 3x_1, s_1 = s_2 - 2x_2, s_2 = s_3 - x_3,$$

确定决策变量的取值范围(允许决策集合)：

$$x_1 = \frac{1}{3}s_1, 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}s_2, 0 \leq x_3 \leq s_3$$

(由状态变量定义可知$s_0 = 0$；取边界条件为$f_0(s_0) = 0$)

用动态规划方法求解静态规划

- **解：** 采用顺序解法，由前向后递推，依次有

$$f_1(s_1)=\max_{x_1={s_1}/{3}}\left[4x_1^2+f_0(s_0)\right]=\frac{4}{9}s_1^2,\ x_1^*=\frac{1}{3}s_1;$$

$$f_2(s_2)=\max_{0\le x_2\le {s_2}/{2}}\left[-x_2^2+f_1(s_1)\right]=\max_{0\le x_2\le {s_2}/{2}}\left[-x_2^2+\frac{4}{9}s_1^2\right]$$

$$=\max_{0\le x_2\le {s_2}/{2}}\left[-x_2^2+\frac{4}{9}(s_2-2x_2)^2\right]=\max_{0\le x_2\le {s_2}/{2}}h_2(s_2,x_2)$$

由$\dfrac{dh_2}{dx_2}=\dfrac{14}{9}x_2-\dfrac{16}{9}s_2=0$，得$x_2=\dfrac{8}{7}s_2$，但该点不在允许决策集合内，故 $h_2(s_2,x_2)$ 的最大值必在两个端点上选取，而$h_2(0)=\dfrac{4}{9}s_2^2,\ h_2\left(\dfrac{s_2}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}s_2^2$，故$h_2(s_2,x_2)$的最大值点在$x_2=0$处，因此得到：

$$f_2(s_2)=\frac{4}{9}s_2^2,\ x_2^*=0;$$

用动态规划方法求解静态规划

- **解：** $f_3(s_3) = \max\limits_{0\le x_3\le s_3} [2x_3^2 + 12 + f_2(s_2)]$

$$= \max_{0\le x_3\le s_3} \left[2x_3^2 + 12 + \frac{4}{9}(s_3 - 2x_3)^2\right] = \max_{0\le x_3\le s_3} h_3(s_3, x_3)$$

由$\dfrac{dh_3}{dx_3} = \dfrac{44}{9}x_3 - \dfrac{8}{9}s_3 = 0$，得$x_3 = \dfrac{2}{11}s_3$,又$\dfrac{d^2h_3}{dx_3^2} = \dfrac{44}{9} > 0$，

故该点为极小值点，而$h_3(0) = \frac{4}{9}s_3^2 + 12$, $h_3(s_3) = 2s_3^2 + 12$，故$h_3(s_3, x_3)$的最大值点在$x_3 = s_3$处，因此得到

$$f_3(s_3) = 2s_3^2 + 12,\ x_3^* = s_3$$

由于$s_3 \le 9$，故须再对s_3求一次极值, 即$\max\limits_{s_3\le 9} f_3(s_3) = \max\limits_{s_3\le 9}[2s_3^2 + 12]$,

显然，当$s_3 = 9$时$f_3(s_3)$才能达到最大值，故$f_3(9) = 174$为最大值。

反推可求得:

最优解为$x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 9$；最优值为$\max z = f_3(9) = 174.$

用动态规划方法求解静态规划

- **备注**
  - 例4中，若已知初始状态$s_1 = c$，也可用顺序法求解。类似地，若已知终止状态，也可用逆序法求解。
    - 参见《运筹学（清华第4版）》241页
    - 针对问题的不同特点，灵活选用这两种求解方法，可使求解过程简化。

用动态规划方法求解静态规划

- **备注**
  - 例5中，若先做代换，令$y_1 = 3x_1$， $y_2 = 2x_2$，$y_3 = x_3$，将原问题变为

$$\max z = \frac{4}{9}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + 2y_3^2 + 12$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \le 9 \\ y_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

再解此问题，然后变换回x_i也可以。

Thank you!

谢谢！