运筹与优化
Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

整数线性规划问题

第五章

内容提要

- 整数线性规划问题的数学模型
- 割平面法
- 分支定界法
- 0-1型整数规划
- 指派问题与匈牙利法

课后研读：教材《运筹学教程》(第5版)134-140页的内容。

整数线性规划问题的数学模型

第1节

整数线性规划数学模型的一般形式

- 整数线性规划
  - 要求一部分或全部决策变量取整数的规划问题称为**整数规划(Integer Programming, IP)**。
  - 不考虑整数条件，由整数规划问题中余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为该整数规划问题的松弛问题(slack problem)。
  - 若整数规划问题的松弛问题是一个线性规划问题，则称该整数规划为**整数线性规划**(Integer Linear Programming, ILP)。
    - 纯整数线性规划(Pure Integer Linear Programming)：所有变量取整数。有时也称为全整数规划。
      - **0-1整数线性规划：**决策变量只取0或1的整数线性规划规划。
    - 混合整数线性规划(Mixed Integer Linear Programming)：部分变量取整数。

本章仅讨论整数线性规划，后面提到的整数规划，一般均指整数线性规划。

整数线性规划数学模型的一般形式

- 整数线性规划的数学模型

$$\min cX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_i\text{为整数，} \ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

其中，A, b, c的定义如线性规划中所述。

- 该整数线性规划的松弛问题为

$$\min cX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

整数规划的特点

- 整数规划与线性规划的关系
  - **线性规划**是连续变量的线性优化问题；**整数规划**是全部或部分变量为离散变量的线性优化问题。
    - 很多管理问题无法归结为线性规划问题，但是却可通过设置逻辑变量建立整数规划的数学模型
  - 从结构上看，整数规划与线性规划差别不大，但**求解难度却大大增加**。由于与线性规划**结构相似**，目前整数规划的一些常用算法与线性规划的求解算法有关。
  - 整数规划的求解方法：是否可将整数规划松弛问题的最优解通过“舍入化整”来求解原整数规划问题？
    - 实际上，这样既不可靠，又不一定有效（因为常常得不到整数规划的最优解，甚至根本不是可行解），因此，需要对整数规划问题进行专门研究。

整数规划的特点

- 整数规划与线性规划的关系
  - **例1** 求下述整数规划问题的最优解

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且均取整数值} \end{cases}$$

解：用图解法（见下页的图）求得该问题相应的线性规划问题（松弛问题）的最优解为点(3.25, 2.5)。

用凑整法考虑四种组合：(4,3), (4,2), (3,3), (3,2)。

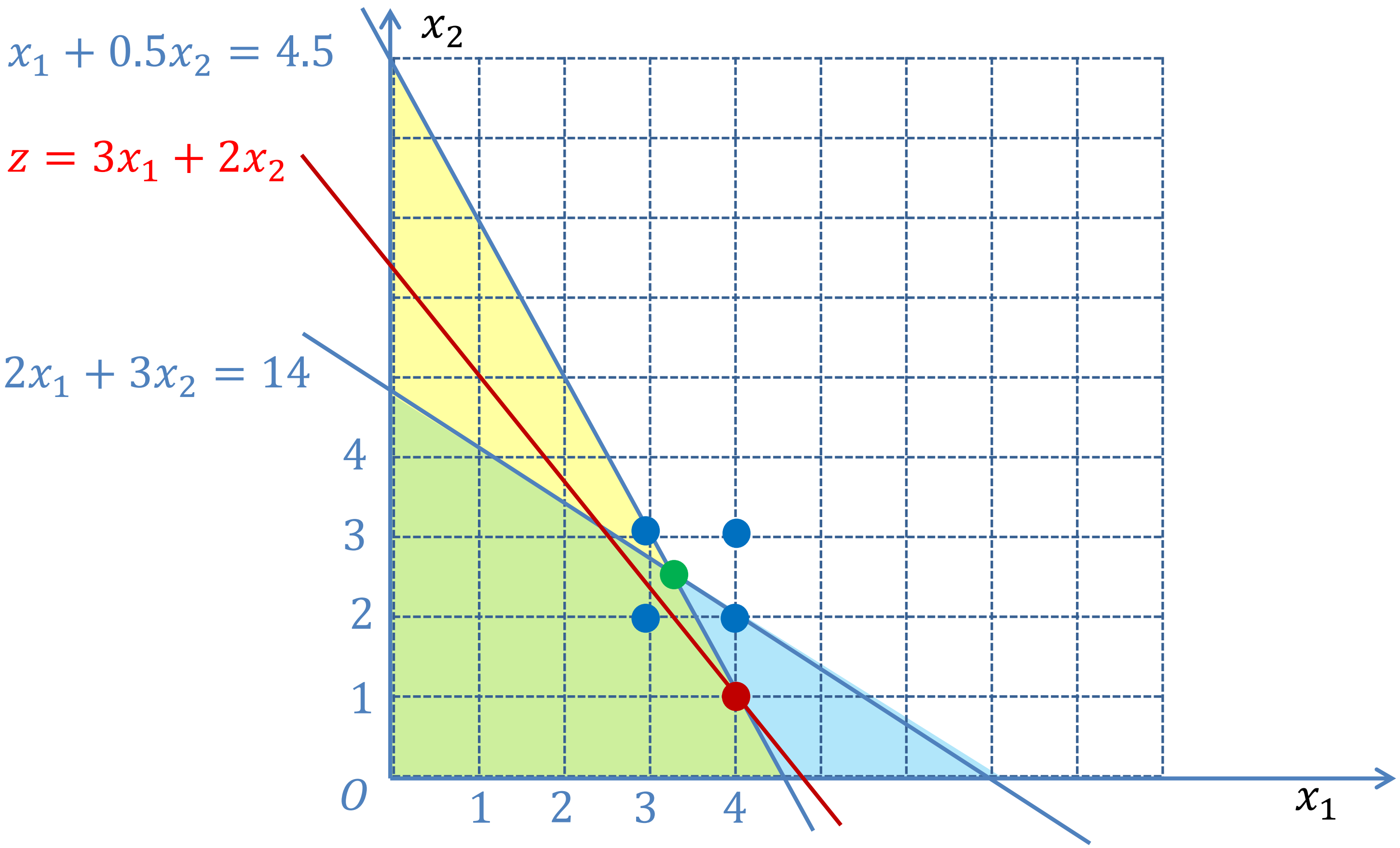
前三个点都不是可行解，而点(3,2)虽然是可行解，但不是最优解。

实际上，该问题的最优解为点(4,1), $z^* = 14$。 但(4,1)并不是松弛问题可行域的顶点。

因此，一般地，直接用图解法或单纯形法无法求得整数规划问题的解。

整数规划的特点

- 整数规划与线性规划的关系
  - 解(续)： 用图解法求解的情形



整数规划应用举例

- 引入0-1变量的实际问题
  - (1) m个约束条件（ ≤型）中只有k个起作用

设m个约束条件为:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i=1,\dots,m)$$

- 定义

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个约束条件不起作用} \\ 0, & \text{第}i\text{个约束条件起作用} \end{cases}$$

又设M为充分大的正数，则

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + My_i \quad (i=1,\dots,m) \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_m = m-k \end{cases}$$

表明上述m个约束条件中只有k个起作用

整数规划应用举例

- 引入0-1变量的实际问题
  - (2) 约束条件的右端项可能是r个值$b_1, \dots, b_r$中的某一个，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_1 \text{ 或} b_2 \text{或} \dots \text{或} b_r$$

- 定义

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{约束条件右端项为} b_i \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

则上述条件可表示为

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \sum_{i=1}^{r} b_i y_i \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_r = 1 \end{cases}$$

整数规划应用举例

- 引入0-1变量的实际问题
  - (3) 两组条件中只满足一组

例如：若$x_1 \le 4$，则$x_2 \ge 1$；否则(即若$x_1 > 4$)，$x_2 \le 3$.

- 定义

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{组条件不起作用} \\ 0, & \text{第}i\text{组条件起作用} \end{cases} \quad (i = 1,2)$$

又M设为充分大的正数，则上述条件可表示为

$$\begin{cases} x_1 \le 4 + My_1 \\ x_2 \ge 1 - My_1 \\ x_1 > 4 - My_2 \\ x_2 \le 3 + My_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

整数规划应用举例

例如：某工厂为了生产某种产品，有几种不同的生产方式可供选择，如选择投资高的生产方式（选购自动化程度高的设备），由于产量大，因而分配到每件产品的变动成本就降低；反之，如选定投资低的生产方式，将来分配到每件产品的变动成本可能增加，所以必须全面考虑。

- 引入0-1变量的实际问题
  - (4) 用以表示含固定费用的函数

设x_j为采用第j种生产方式时的产品数量，其生产费用函数可表示为

$$C_j(x_j)=\begin{cases}K_j+c_jx_j, & x_j>0\text{时}\\ 0, & x_j=0\text{时}\end{cases}$$

其中K_j是跟产量无关的生产准备费用（固定成本）。问题的目标是使在所有生产方式下总生产费用为最小，即 $\min z=\sum_{j=1}^{n}C_j(x_j)$.

- 定义 $y_j=\begin{cases}1, & x_j>0\text{时}\\ 0, & x_j=0\text{时}\end{cases}$，并引入一个特殊的约束条件：$x_j\le My_j$

显然当$x_j>0$时，必定有 $y_j=1$. 从而上述问题可表示为

$$\min z=\sum_{j=1}^{n}(c_jx_j+K_jy_j)$$

$$\begin{cases}0\le x_j\le My_j\\ y_j=0\text{或}1\end{cases}$$

可以看出，当$x_j=0$时，为使z**极小化**，必定有$y_j=0$.

课堂练习

- 某公司拟在市东、西、南三区建立门市部。拟议中有7个位置（点）$A_i\ (i=1,2,\cdots,7)$可供选择。规定：
  - 在东区，由A_1, A_2, A_3三个点中至多选两个；
  - 在西区，由A_4, A_5两个点中至少选一个；
  - 在南区，由A_6, A_7两个点中至少选一个。

  如选用A_i点，设备投资估计为b_i元，每年可获利润估计为c_i元，但投资总额不能超过B元。问应选择哪几个点可使年利润为最大？

谢 谢！

Thank you!