



运筹与优化

Operations Research & Optimization

鲁海燕

江南大学理学院

信息与计算科学系

2019-2020-2学期

Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

线性规划的对偶理论

第二章

内 容 提 要

- 线性规划的对偶问题
- 对偶问题的基本性质
- 影子价格
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析
- 参数线性规划

线性规划的对偶问题

第1节

对偶问题的提出

- 什么是对偶？

- “修辞方式，用对称的字句加强语音的效果。”
——《现代汉语词典》（修订版）
- “实质相同但从不同角度提出的不同提法的一对互为对偶的问题。如企业怎样充分利用现有人力、物力完成更多任务和怎样用最少人力物力去完成给定的任务，就是互为对偶的一对问题。对偶理论是从数量关系上研究这一对问题的性质、关系及应用的理论和方法。”
——《中国企业管理百科全书》

无论是从理论或实践角度，**对偶理论**都是线性规划中的一个最重要和有趣的概念。

对偶问题的提出

产品资源 \	产品I	产品II	现有条件
设备A	2台时/件	2台时/件	12台时
设备B	4台时/件	0台时/件	16台时
设备C	0台时/件	5台时/件	15台时
产品获利	2百元/件	3百元/件	

- 第一章中**例2**（常山机器厂利用A、B、C三种设备生产I、II两种产品，如何安排生产使利润最大？）的线性规划模型（LP1）为

$$\text{LP1} \quad \max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 5x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 现从另一角度提出问题。
- 假定有另一四海机器厂，为扩大生产想收买常山机器厂拥有的设备资源。问：四海机器厂应至少付出多大代价，才能使常山机器厂愿意放弃生产活动，出让自己的资源？

对偶问题的提出

产品资源 \	产品I	产品II	现有条件
设备A	2台时/件	2台时/件	12台时
设备B	4台时/件	0台时/件	16台时
设备C	0台时/件	5台时/件	15台时
产品获利	2百元/件	3百元/件	

- 设常山机器厂将出让资源(设备A、B、C台时)的单价分别定为 y_1 、 y_2 、 y_3 百元。
- 常山机器厂愿意出让资源的条件是：出让收入(租金)不低于用同等数量资源由自己组织生产时的获利。因此有

$$2y_1 + 4y_2 \geq 2$$

$$2y_1 + 5y_3 \geq 3$$

- 常山机器厂出租拥有的A、B、C设备的全部台时的收入为
- $$12y_1 + 16y_2 + 15y_3$$
- 四海机器厂希望用最小的代价把常山机器厂的全部资源收买过来，因此有

$$\min \omega = 12y_1 + 16y_2 + 15y_3$$

对偶问题的提出

- 因而可得另一线性规划模型（LP2）：

$$\begin{aligned} \text{LP2} \quad \min \omega &= 12y_1 + 16y_2 + 15y_3 \\ &\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 & \geq 2 \\ 2y_1 & + 5y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 若将LP1作为线性规划问题的原问题(primal problem), 则LP2称为线性规划问题的对偶问题(dual problem)。

对偶问题的提出

- 原问题

LP₁

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 5x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 对偶问题

LP₂

$$\begin{aligned} \min \omega &= 12y_1 + 16y_2 + 15y_3 \\ \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 5y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

原问题与对偶问题的正则形式

展开形式

• 原问题

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

• 对偶问题

$$\min \omega = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \geq (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0$$

矩阵形式

• 原问题

$$\max z = cX$$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

• 对偶问题

$$\min \omega = Yb$$

$$YA \geq C$$

$$Y \geq 0$$

原问题与对偶问题的正则形式也称为对称形式。

原问题与对偶问题的正则形式

		原问题(max)					
		c_1	c_2	...	c_n	右端项	
		x_1	x_2	...	x_n		
对偶问题(min)	b_1	y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\leq b_1$
	b_2	y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{22}	$\leq b_2$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
	b_m	y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{m1}	$\leq b_m$
	右端项		$\geq c_1$	$\geq c_2$...	$\geq c_n$	

原问题与对偶问题的正则形式

- 例1 将引例中的LP2作为原问题，写出其对偶问题。
- 解 把LP2作为原问题 转化为正则形式

LP2

$$\begin{aligned} \min \omega &= 12y_1 + 16y_2 + 15y_3 \\ \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 & \geq 2 \\ 2y_1 + 5y_3 & \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(-\omega) &= -12y_1 - 16y_2 - 15y_3 \\ \begin{cases} -2y_1 - 4y_2 & \leq -2 \\ -2y_1 - 5y_3 & \leq -3 \\ y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

转化为正则形式

写出对偶问题

LP1

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 & \leq 12 \\ 4x_1 & \leq 16 \\ 5x_2 & \leq 15 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(-z) &= -2x_1 - 3x_2 \\ \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 & \geq -12 \\ -4x_1 & \geq -16 \\ -5x_2 & \geq -15 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

LP1与LP2互为对偶

原问题与对偶问题的标准形式

- 对于标准形式的线性规划问题，如何处理？

设线性规划问题

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

第一步：将等式约束分解为两个不等式约束，得

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \dots, m & (*) \\ -\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i, & i = 1, 2, \dots, m & (**) \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

设是 y_i' 对应于(*)式的对偶变量，是 y_i'' 对应于(**)式的对偶变量， $i = 1, 2, \dots, m$

原问题与对偶问题的标准形式

- 对于标准形式的线性规划问题，如何处理？

第二步：按对称形式的变换关系写出对偶问题

$$\begin{aligned} \min \omega &= \sum_{i=1}^m b_i y_i' + \sum_{i=1}^m (-b_i y_i'') \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^m (-a_{ij} y_i'') \geq c_j, & j=1,2,\dots,n \\ y_i', y_i'' \geq 0, & i=1,2,\dots,m \end{cases} \end{aligned}$$

令 $y_i = y_i' - y_i''$, 由于 $y_i', y_i'' \geq 0$, 可知 y_i 不受约束, 将 y_i 代入上述规划问题并整理得到对偶问题

$$\begin{aligned} \min \omega &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, & j=1,2,\dots,n \\ y_i \text{ 为无约束}, & i=1,2,\dots,m \end{cases} \end{aligned}$$

原问题与对偶问题的标准形式

展开形式

原问题

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

对偶问题

$$\min \omega = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \geq (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \text{ 无约束}$$

矩阵形式

原问题

$$\max z = CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

对偶问题

$$\min \omega = Yb$$

$$YA \geq C$$

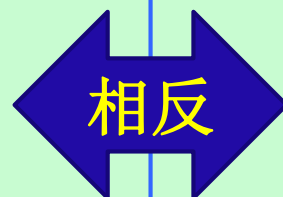
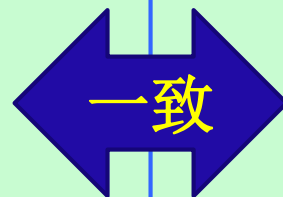
$$Y \text{ 无约束}$$

原问题与对偶问题的正则形式和其标准形式完全等价。

原问题与对偶问题的对应关系



原问题（或对偶问题）	对偶问题（或原问题）
目标函数 $\max z$ 变量 $\left\{ \begin{array}{l} n \text{ 个} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{无约束} \end{array} \right.$	目标函数 $\min w$ 约束条件 $\left\{ \begin{array}{l} n \text{ 个} \\ \geq \\ \leq \\ = \end{array} \right.$
约束条件 $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ 个} \\ \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right.$ 约束条件右端项 目标函数变量的系数	变量 $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ 个} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{无约束} \end{array} \right.$ 目标函数变量的系数 约束条件右端项



原问题与对偶问题的对应关系

- **例2** 写出下述线性规划的对偶问题

$$\begin{aligned} \min z &= 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ &\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 24 \\ -3x_1 - 6x_2 - 4x_3 \geq 15 \\ 5x_2 + 3x_3 = 30 \\ x_1 \leq 0, x_2 \text{取值无约束}, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- **解**
 - **方法一**：将原问题化为**规范形式**，然后逐步求解（《运筹学基础及应用（第六版）》66页**例2**）。

原问题与对偶问题的对应关系

• 例2的解

- 方法二：按照原问题与对偶问题的对应关系表直接写出对偶问题。

原问题（对偶问题）

$$\begin{aligned}
 &\min z = 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\
 &\text{s.t.} \\
 &\quad -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 24 \\
 &\quad -3x_1 - 6x_2 - 4x_3 \geq 15 \\
 &\quad \quad 5x_2 + 3x_3 = 30 \\
 &\quad \quad \quad x_1 \leq 0 \\
 &\quad \quad \quad x_2 \text{取值无约束} \\
 &\quad \quad \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

对偶问题（原问题）

$$\begin{aligned}
 &\max \omega = 24y_1 + 15y_2 + 30y_3 \\
 &\text{s.t.} \\
 &\quad y_1 \leq 0 \\
 &\quad y_2 \geq 0 \\
 &\quad y_3 \text{取值无约束} \\
 &\quad -4y_1 - 3y_2 \geq 7 \\
 &\quad \quad 2y_1 - 6y_2 + 5y_3 = 4 \\
 &\quad -6y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq -3
 \end{aligned}$$

若将得到的对偶问题作为原问题，则按箭头从右到左即可写出其对偶问题。

对上述形式作适当调整，使之表达为合理规范的形式。

谢谢!

Thank you!