存储论

第九章

Haiyan Lu
Jiangnan University

随机性存储模型

第3节

随机性存储模型

- 模型概述
  - 随机性存储模型的重要特点是**需求是随机的，其概率或分布为已知**。
  - 可供选择的策略主要有三种：

    (1) 定期订货策略：定期订货，但订货数量需要根据上一个周期末剩下货物的数量决定订货量。剩下的数量少，可以多订；剩下的数量多，可以少订或不订。

    (2) 定点订货策略：定点订货，存储降到某一确定的数量(订货点)时即订货，不再考虑间隔的时间；每次订货的数量不变。

    (3) (s, S)存储策略：把定期订货与定点订货综合起来的方法，隔一定时间检查一次存储，若存储量高于一个数值s，则不订货；若存储量小于s，则订货补充存储，订货量要使存储达到S。
  - 不允许缺货的条件只能从**概率意义**方面来理解。
  - 存储策略的优劣通常以**盈利/损失期望值的大小**作为衡量标准。

模型5：需求是离散的随机变量

- 报童问题(Newsboy Problem, or News Vendor Problem)
  - 报童每日订购若干份次日的报纸零售。报纸的需求量 r 是一个随机变量。报童每售出一份报纸赚 k 元；若报纸未能售出，则每份赔 h 元。根据以往经验，每日售出报纸份数 r 的概率 $P(r)$是已知的，问报童每日最好准备多少份报纸？
- 求解思路
  - 问：报童每日报纸的订货量Q为何值时，赢利的期望值最大？或：如何适当地选择Q值，使因不能售出报纸的损失和因缺货而失去销售机会的损失，两种损失的期望值之和最小？
  - 两种求解方式所得的计算结果相同。（参见《运筹学（清华第四版）》416-417页）
- 备注
  - 报童问题有需求为**离散**和需求为**连续**随机变量两种版本。

模型5：需求是离散的随机变量

- 报童问题
- **解:**
  - 用计算损失期望值最小的方法求解。

设售出报纸数量为r，其概率$P(r)$为已知，$\sum_{r=0}^{\infty} P(r) = \mathbf{1}$。

设报童订购报纸数量为Q，

(1) 供大于求时($Q \geq r$), 报纸因不能售出而需承担损失, 其期望值为:

$$\sum_{r=0}^{Q} h(Q-r)P(r)$$

(2) 供不应求时($Q < r$), 因缺货而少赢利导致损失，其期望值为:

$$\sum_{r=Q+1}^{\infty} k(r-Q)P(r)$$

综合(1)、(2)两种情况，当订货量为Q时，损失的期望值为:

$$C(Q) = h\sum_{r=0}^{Q} (Q-r)P(r) + k\sum_{r=Q+1}^{\infty} (r-Q)P(r)$$

由于需求r为离散变量，故不能用求导的方法求极值，而是采用**边际分析法**求解。

模型5：需求是离散的随机变量

- 报童问题
- **解（续）：**

  每日报纸最佳订购数量Q应满足：

$$(1)\ C(Q) \le C(Q+1)$$

$$(2)\ C(Q) \le C(Q-1)$$

  经推导整理可得，报纸最佳订购数量Q应按下列不等式确定：

$$\boxed{\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) \le \frac{k}{k+h} \le \sum_{r=0}^{Q} P(r)}$$

模型5：需求是离散的随机变量

- 报童问题
  - 备注
    - 若用计算赢利期望值最大的方法求解，也可得到与上述确定最佳订购数量Q相同的不等式。
      - 无论从哪一方面（损失期望值最小，盈利期望值最大）来考虑，报童每日的报纸最佳订购数量是一个确定的数值。
    - **模型5**只解决一次订货问题(**单周期随机存储模型**)，而**报童问题**实际上是**每日**订货策略问题，按**模型5**所给出的策略可以认为是解决了报童问题。但这时模型中有一个**严格的规定**，即两次订货之间没有什么联系，都看做是**独立**的一次订货（**即：每个周期只订货一次，订货可重复进行，但在各周期之间订货量与销售量互相保持独立**）。这种存储策略也称为**定期定量订货**。

Haiyan Lu
Jiangnan University

模型5：需求是离散的随机变量

- **例7** 某店拟出售甲商品，每单位甲商品成本为200元，售价为280元。若不能售出，则必须减价为160元，减价后一定可以售出。已知售货量服从泊松分布

$$P(r)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!}\quad（\lambda\text{为平均售出数}）$$

根据以往经验，平均售出数为6单位($\lambda=6$)。问该店订购量应为多少?

- **解**:

该店的缺货损失为每单位商品$280-200=80$元；滞销损失为每单位商品$200-160=40$元，故$k=80$, $h=40$, $\frac{k}{k+h}=\frac{80}{80+40}\cong 0.667$.

记 $F(Q)=\sum_{r=0}^{Q}P(r)=\sum_{r=0}^{Q}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!}$，查泊松累计分布表可得

$$F(6)=\sum_{r=0}^{6}\frac{e^{-6}6^{r}}{r!}=0.6063,\quad F(7)=\sum_{r=0}^{7}\frac{e^{-6}6^{r}}{r!}=0.7440$$

因$F(6)<\frac{k}{k+h}<F(7)$，故订货量应为7单位，此时损失期望值最小。

答：该店订货量应为7单位甲商品。

模型5：需求是离散的随机变量

- **例7**

附表一 泊松分布函数表 $\left(F(k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\right)$

k \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161
6							1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665
7										1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881
8											1.0000	0.9998	0.9989	0.9962
9												1.0000	0.9997	0.9989
10													0.9999	0.9997
11													1.0000	0.9999
12														1.0000

Haiyan Lu 5/20/2020
Jiangnan University

模 型5: 需 求 是 离 散 的 随 机 变 量

- 例7

k \ λ	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
0	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005
2	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028
3	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103
4	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293
5	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671
6	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301
7	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202
8	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328
9	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579
10	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830
11	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945	0.9890	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968
12	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916
13	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645
14		1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165
15			1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513
16				1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730
17					1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857
18						1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928
19							1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965
20									1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984
21										1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993
22											1.0000	0.9999	0.9999	0.9997
23												1.0000	0.9999	0.9999

Haiyan Lu Jiangnan University

课堂练习

模型5: 需求是离散的随机变量

- **例8** 上题中，若缺货损失费为40元，滞销损失费为80元。在这种情况下该店订货量应为多少？

- **解:**

$$k = 40, \qquad h = 80, \quad \frac{k}{k+h} = \frac{40}{40+80} \cong 0.3333$$

查统计表（泊松累计分布表），找与0.3333相近的数:

$$F(4) = \sum_{r=0}^{4} \frac{e^{-6}6^r}{r!} = 0.2851, \quad F(5) = \sum_{r=0}^{5} \frac{e^{-6}6^r}{r!} = 0.4457$$

因 $F(4) < 0.3333 < F(5)$，故订货量应为5单位, 此时损失期望值最小。

答：该店订货量应为5个单位甲商品。

模型6：需求是连续的随机变量

- 模型概述
  - 设货物单位成本为K，货物单位售价为P，单位存储费为C_1，需求r是连续的随机变量，其密度函数为$\varphi(r)$，$\varphi(r)\mathrm{d}r$表示随机变量在r与$r+\mathrm{d}r$之间的概率，其分布函数为$F(a)=\int_0^a \varphi(r)\mathrm{d}r$，$(a>0)$，生产或订购的数量为 Q , 问如何确定 Q 的数值, 使赢利的期望值最大？
- **解**:
  - 显然，当订购量为Q、需求量为r时，实际销售量为$\min[r,Q]$，即：
    - 当$r\le Q$时，实际销售量为 r；
    - 当$r>Q$时，实际销售量只能为 Q.
  - 单期(single period)需支付的费用
    - 货物存储费：$C_1(Q)=\begin{cases} C_1\cdot(Q-r), & r\le Q \\ 0 & , r>Q \end{cases}$
    - 货物成本费：KQ
    - 货物订购费：订购费不考虑(订购费不影响**单期**存储问题的订货策略)

模型6：需求是连续的随机变量

- **解（续）：**
  - 单期赢利

$$W(Q) = P \cdot \min[r, Q] - KQ - C_1(Q)$$

(赢利 = 实际销售货物的收入−货物成本−支付的存储费用)

  - 单期赢利的期望值

$$E[W(Q)] = \int_0^Q Pr\varphi(r)\mathrm{d}r + \int_Q^\infty PQ\varphi(r)\mathrm{d}r - KQ - \int_0^Q C_1 \cdot (Q-r)\varphi(r)\mathrm{d}r =$$

$$\int_0^\infty Pr\varphi(r)\mathrm{d}r - \int_Q^\infty Pr\varphi(r)\mathrm{d}r + \int_Q^\infty PQ\varphi(r)\mathrm{d}r - KQ - \int_0^Q C_1 \cdot (Q-r)\varphi(r)\mathrm{d}r$$

$$= \underbrace{PE(r)}_{\substack{\text{常量} \\ \text{(平均赢利)}}} - \left\{\underbrace{P\int_Q^\infty (r-Q)\varphi(r)\mathrm{d}r}_{\substack{\text{因缺货失去销售机会} \\ \text{损失的期望值}}} + \underbrace{\int_0^Q C_1 \cdot (Q-r)\varphi(r)\mathrm{d}r}_{\substack{\text{因滞销受到损失的期望值} \\ \text{(只考虑了存储费)}}} + \underbrace{KQ}_{\text{常量}}\right\}$$

模型6：需求是连续的随机变量

- **解（续）：**
  - 记 $E[C(Q)] = P\int_Q^{\infty}(r-Q)\varphi(r)\mathrm{d}r + C_1\int_0^Q(Q-r)\varphi(r)\mathrm{d}r + KQ$

    则有下列等式：

    $$\max E[W(Q)] = PE(r) - \min E[C(Q)] \quad (*)$$
    $$\max E[W(Q)] + \min E[C(Q)] = PE(r) \quad (**)$$

    (*)式表明由期望赢利最大和由期望损失最小所得出的Q值相同；

    (**)式表明最大赢利期望值与最小损失期望值之和为常数。
  - 根据上述分析，**求赢利期望值最大**可以转化为**求损失期望值最小**。当Q可连续取值时，$E[C(Q)]$是Q的连续函数，可利用微分法求最小值：

    $$\frac{\mathrm{d}E[C(Q)]}{\mathrm{d}Q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q}\left[P\int_Q^{\infty}(r-Q)\varphi(r)\mathrm{d}r + C_1\int_0^Q(Q-r)\varphi(r)\mathrm{d}r + KQ\right]$$
    $$= C_1\int_0^Q\varphi(r)\mathrm{d}r - P\int_Q^{\infty}\varphi(r)\mathrm{d}r + K$$

    令 $\frac{\mathrm{d}E[C(Q)]}{\mathrm{d}Q} = 0$，记 $F(Q) = \int_0^Q\varphi(r)\mathrm{d}r$，可得：$F(Q) = \frac{P-K}{C_1+P}$

    从上式中解出Q，记为Q^*， Q^*为$E[C(Q)]$的驻点。

Haiyan Lu 5/20/2020
Jiangnan University

模型6：需求是连续的随机变量

- **解（续）：**
  - 又因 $\frac{\mathrm{d}^2 E[C(Q)]}{\mathrm{d}Q^2} = C_1\varphi(Q) + P\varphi(Q) > 0$

    故 Q^*为$E[C(Q)]$的极小值点，在本模型中也是最小值点。
  - 若$P-K \le 0$，显然由于$F(Q) \ge 0$，等式不成立。但这种情况表示订货无利可图， 故不应订货或生产，即取 $Q^* = 0$。
- **备注**
  - 上述分析及相应求解式中只考虑了失去销售机会的损失P，若缺货时要付出的费用$C_2 > P$，则应有

    $$E[C(Q)] = C_2\int_Q^{\infty}(r-Q)\varphi(r)\mathrm{d}r + C_1\int_0^Q(Q-r)\varphi(r)\mathrm{d}r + KQ$$

    按上述方法推导得到 $F(Q) = \int_0^Q \varphi(r)\mathrm{d}r = \frac{C_2-K}{C_1+C_2}$
  - 模型5和模型6都只解决**单期随机存储问题**。从一般情况(多时期，时期给定，订购费不计)来考虑，上一时期未售出的货物可在当前时期继续出售，此时应如何制定存储策略？见下面“**定期订货、订货量不定的存储策略**”。

模型6：需求是连续的随机变量

- 备注（续）
  - 定期订货、订货量不定的存储策略(多时期，时期给定)
    - 设上一时期未能售出的货物数量为I，作为本时期初的存储，有

$$\min E[C(Q)] = K(Q-I) + C_2\int_Q^{\infty}(r-Q)\varphi(r)\mathrm{d}r + C_1\int_0^Q(Q-r)\varphi(r)\mathrm{d}r$$

$$= -KI + \min\left\{C_2\int_Q^{\infty}(r-Q)\varphi(r)\mathrm{d}r + C_1\int_0^Q(Q-r)\varphi(r)\mathrm{d}r + KQ\right\}$$

推导可得

$$F(Q) = \int_0^Q \varphi(r)\mathrm{d}r = \frac{C_2-K}{C_1+C_2}$$

利用**微分法**求出Q^*的值，相应的**存储策略**为：

- 当$I \geq Q^*$时，本时期不订货；
- 当$I < Q^*$时，本时期应订货，订货量为$Q = Q^* - I$，使本时期的存储达到Q^*，此时赢利期望值最大。

这种策略称为**定期订货、订货量不定**的存储策略。

(t, S) 策略

模型6：需求是连续的随机变量

- **例9** 设在某食品商店内，每天对面包的需求r服从$\mu = 300$，$\sigma = 50$的**正态分布**。已知每个面包的售价P为0.50元，成本K为0.30元，当天未售出的面包处理价W为每个0.20元。问该商店每天应生产多少面包，使预期利润为最大？（单期，需求连续）
- **解**：
  - 此例是**需求为连续**随机变量的**报童问题**，其中

$$k = P - K = 0.50 - 0.30 = 0.20(元),\ h = K - W = 0.3 - 0.2 = 0.1(元)$$

按照类似**模型6**的方法，进行推导得到

$$F(Q) = \int_{-\infty}^{Q} \varphi(r)\mathrm{d}r = \Phi\left(\frac{Q-\mu}{\sigma}\right) = \frac{P-K}{P-W} = \frac{k}{k+h}$$

计算知 $\frac{k}{k+h} = \frac{0.2}{0.2+0.1} \cong 0.667$，查累计正态分布表可得：

$$\frac{Q-\mu}{\sigma} = 0.43$$

求解得

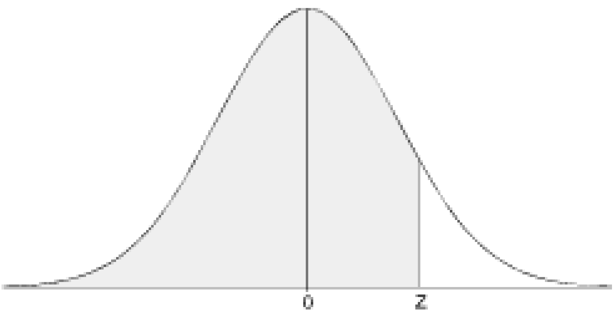
$$Q^* = 0.43\sigma + \mu = 0.43 \times 50 + 300 = 322$$

即该商店所属的工厂每天应生产322个面包，可使预期利润为最大。

Haiyan Lu
Jiangnan University

模型6：需求是连续的随机变量

Cumulative Standard Normal Distribution Table



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389

Haiyan Lu 5/21/2020
Jiangnan University

模 型7: (s, S) 型 存 储 模 型

- 需求为连续随机变量时
  - **模型概述**
    - 设货物单位成本为K，单位存储费为C_1，单位缺货费为C_2，每次订购费为C_3，需求r是**连续**的随机变量，其密度函数为$\varphi(r)$，$\int_0^{\infty} \varphi(r)\mathrm{d}r = 1$, 分布函数为 $F(a) = \int_0^{a} \varphi(r)\mathrm{d}r, (a > 0)$，期初存储为$I$, 订货量为$Q$，使此时期初存储达到$S = I + Q$. 问如何确定$Q$的数值, 使损失/费用的期望值最小（或赢利的期望值最大）？
  - **解**：
    - 先考虑**最大存储量**S 。当期初存储量I不足订货点s(即$I < s$)时需要订货。
    - 期初存储I在本时期内为常量, 订货量为Q, 使此时期初存储达到$S = I + Q$.
    - 本时期需支付的费用：
      - 订货费： $C_3 + KQ$
      - 存储费用的期望值： $\int_0^{S} C_1(S - r)\varphi(r)\mathrm{d}r$
      - 缺货费用的期望值： $\int_S^{\infty} C_2(r - S)\varphi(r)\mathrm{d}r$

模型7: (s, S) 型存储模型

- 需求为连续随机变量时
  - **解（续）：**
    - 本时期需支付费用的期望值之和为

$$C(S) = C_3 + KQ + \int_0^S C_1(S-r)\varphi(r)\mathrm{d}r + \int_S^\infty C_2(r-S)\varphi(r)\mathrm{d}r$$

$$= C_3 + K(S-I) + \int_0^S C_1(S-r)\varphi(r)\mathrm{d}r + \int_S^\infty C_2(r-S)\varphi(r)\mathrm{d}r$$

Q为连续取值，故$C(S)$是S的连续函数，从而有

$$\frac{\mathrm{d}C(S)}{\mathrm{d}S} = K + C_1\int_0^S \varphi(r)\mathrm{d}r - C_2\int_S^\infty \varphi(r)\mathrm{d}r$$

令$\frac{\mathrm{d}C(S)}{\mathrm{d}S} = 0$，有

$$F(S) = \int_0^S \varphi(r)\mathrm{d}r = \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2}$$

注意： S的确定和订货点 s 无关。

一般情况下有$0 < \frac{C_2-K}{C_1+C_2} < 1$，记$\frac{C_2-K}{C_1+C_2} = N$（称为**临界值**）.

由 $\int_0^S \varphi(r)\mathrm{d}r = N$，确定$S$的值，从而求出订货量$Q = S - I$.

模 型7: (s,S) 型 存 储 模 型

- 需求为连续随机变量时
  - **解（续）：**
    - 再考虑**订货点**s。此时最大存储量S已定。根据**订货点**s的意义，当期初存储$I=s$时，**不订货**所产生的期望费用应当**不超过订货**所产生的期望费用，因此有：

$$C_1\int_0^s(s-r)\varphi(r)\mathrm{d}r+C_2\int_s^\infty(r-s)\varphi(r)\mathrm{d}r$$
$$\le C_3+K(S-s)+C_1\int_0^S(S-r)\varphi(r)\mathrm{d}r+C_2\int_S^\infty(r-S)\varphi(r)\mathrm{d}r$$

即：

$$\boxed{\begin{aligned}&Ks+C_1\int_0^s(s-r)\varphi(r)\mathrm{d}r+C_2\int_s^\infty(r-s)\varphi(r)\mathrm{d}r\\ \le\ &C_3+KS+C_1\int_0^S(S-r)\varphi(r)\mathrm{d}r+C_2\int_S^\infty(r-S)\varphi(r)\mathrm{d}r\end{aligned}}$$

当$s=S$时上述不等式显然成立，但问题的目的是要选取一个**使上式成立的尽可能小的**s值。分析上式可知，比S小的s是可能存在的。

因此，取使上式成立的最小的s作为本模型(s,S)存储策略的**订货点**s 。

Haiyan Lu
Jiangnan University

模型7: (s, S)型存储模型

- 需求为连续随机变量时
  - **解（续）：**
    - 相应的**存储策略**为：每时期**初**检查存储，
      - 当期初库存量$I < s$时，需订货，订货量$Q = S - I$；
      - 当期初库存量$I \geq s$时，不订货。
  - **备注**
    - 对于不易清点数量的存储，常把存储分两堆存放，一堆的数量为s，其余的另放一堆。平时从另放的一堆中取用，当动用了数量为 s 的一堆时，期末即订货；没有动用数量为s的一堆时，则期末不订货。该方法俗称**两堆法**。

模型7: (s,S)型存储模型

- **例10** 已知某产品的单位成本$K=3.0$，单位存储费$C_1=1.0$，单位缺货损失费$C_2=5.0$，每次订购费$C_3=5.0$。需求量r的概率密度函数为

$$\varphi(r)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & \text{当}5\le r\le 10\text{时}\\ 0, & r\text{为其他值}\end{cases}$$

设期初库存为零，试依据(s,S)型存储模型确定s和S的值。

- **解**：计算临界值：$N=\frac{C_2-K}{C_1+C_2}=\frac{5.0-3.0}{1.0+5.0}=0.333$，因此

$$\int_0^S \varphi(r)\mathrm{d}r=\int_5^S \frac{1}{5}\mathrm{d}r=\frac{1}{5}(S-5)=0.333,$$

解得$S=6.7$。再由下面的不等式求解s:

$$Ks+C_1\int_5^s (s-r)\varphi(r)\mathrm{d}r+C_2\int_s^{10}(r-s)\varphi(r)\mathrm{d}r$$

$$\le C_3+KS+C_1\int_5^S (S-r)\varphi(r)\mathrm{d}r+C_2\int_S^{10}(r-S)\varphi(r)\mathrm{d}r$$

将有关数值及函数代入后计算得到： $0.6s^2-8s+21.67\le 0$，取等号并解得$s=3.78$或$s=9.55$，因$9.55>6.7=S$，这个取值不合理，故应取$s=3.78$。

模型7: (s,S)型存储模型

- 需求为离散随机变量时
  - **模型概述**
    - 设货物单位成本为K，单位存储费为C_1，单位缺货费为C_2，每次订购费为C_3，需求r是取离散值$r_0, r_1, \dots, r_m$ $(r_i < r_{i+1})$的随机变量，相应概率为$P(r_0), P(r_1), \dots, P(r_m)$，$\sum_0^m P(r_i) = 1$，期初存储为$I$, 订货量为$Q$，使此时期初存储达到$S = I + Q$. 问如何确定$Q$的数值, 使费用/损失的期望值最小(赢利的期望值最大)?
  - **解:**
    - 期初存储I在本时期内为常量, 订货量为Q, 此时期初存储达到$S = I + Q$.
    - 本时期需支付的费用:
      - 订货费: $C_3 + KQ$
      - 存储费用的期望值: $\sum_{r \le S} C_1 (S - r) P(r)$
      - 缺货费用的期望值: $\sum_{r > S} C_2 (r - S) P(r)$

模型7: (s,S) 型存储模型

- 需求为离散随机变量时
  - **解（续）：**
    - 本时期需支付费用的期望值之和为

$$C(S) = C_3 + KQ + \sum_{r\le S} C_1(S-r)P(r) + \sum_{r>S} C_2(r-S)P(r)$$
$$= C_3 + K(S-I) + \sum_{r\le S} C_1(S-r)P(r) + \sum_{r>S} C_2(r-S)P(r)$$

    - 求出使$C(S)$最小的S值：

(1) 将需求r的随机值按从小到大顺序排列为

$$r_0, r_1, \dots, r_i, r_{i+1}, \dots, r_m;\ r_i < r_{i+1}, \mathrm{i} = 0,1,\dots,\mathrm{m}-1$$

(2) S只从$r_0, r_1, \dots, r_m$中取值，当$S = r_i$时，记为$S = S_i$

(3) 使$C(S)$最小的S的取值S_i应满足下面的不等式:

$$\begin{cases} C(S_{i+1}) - C(S_i) \ge 0 \\ C(S_i) - C(S_{i-1}) \le 0 \end{cases}$$

模型7: (s,S)型存储模型

- 需求为离散随机变量时
  - **解（续）：**

推导可得

$$\boxed{\sum_{r\le S_{i-1}} P(r) < N = \frac{C_2-K}{C_1+C_2} \le \sum_{r\le S_i} P(r)}$$

取满足上式的S_i为S，本时期订货量为$Q = S - I$.

- 求出 s值，使得：当期初存储$I \ge s$时不订货，当$I < s$时要订货，使存储达到S，订货量$Q = S - I$.

取s为$r_0, r_1, \dots, r_m$中使得下面不等式成立的r_i $(r_i \le S)$中的最小者：

$$\boxed{\begin{aligned} &Ks + \sum_{r\le s} C_1(s-r)P(r) + \sum_{r>s} C_2(r-s)P(r) \\ &\le C_3 + KS + \sum_{r\le S} C_1(S-r)P(r) + \sum_{r>S} C_2(r-S)P(r) \end{aligned}}$$

模型7: (s,S)型存储模型

- **例11** 某公司利用塑料作为原料制成产品出售，已知每箱塑料购价为$K=1600$元，存储费每箱$C_1=80$元，缺货费每箱$C_2=2100$元，每次订购费$C_3=300$元，原有存储量$I=20$箱。已知对原料需求的概率为

$$P(r=60\text{箱})=0.20, P(r=80\text{箱})=0.20,$$
$$P(r=100\text{箱})=0.40, P(r=120\text{箱})=0.20,$$

求该公司订购原料的最佳订购量和存储策略。

- **解**：

计算**临界值**: $N=\frac{C_2-K}{C_1+C_2}=\frac{2100-1600}{80+2100}\cong 0.229,$

选择使 $\sum_{r\le S_i} P(r)\ge N$ 成立的S_i中的最小值作为S：

$$P(60)=0.20\ngeq 0.229, P(60)+P(80)=0.20+0.2=0.4>0.229$$

故$S=80$，又原存储量$I=20$，因此该公司订货量为：

$$Q=S-I=80-20=60.$$

模型7: (s, S) 型存储模型

- **解（续）**：

由于已算出$S=80$，因此可以作为s的r值只有60或80。
考查$s=60$时的情形：
将$s=60, S=80$分别代入下面不等式的左右两端

$$Ks+\sum_{r\le s} C_1(s-r)P(r)+\sum_{r>s} C_2(r-s)P(r)$$
$$\le C_3+KS+\sum_{r\le S} C_1(S-r)P(r)+\sum_{r>S} C_2(r-S)P(r)$$

得到：
左端
$= 1600\times 60+2100$
$\times[(80-60)\times 0.2+(100-60)\times 0.4+(120-60)\times 0.2]=163200$
右端
$= 300+1600\times 80+80\times[(80-60)\times 0.2]+2100$
$\times[(100-80)\times 0.4+(120-80)\times 0.2]=164100$
可知不等式成立，且60是使得上述不等式成立的最小的s值，因此取$s=60$.
因此，该公司订购原料的最佳订购量$Q=60$箱；
该公司的**存储策略**为：每个时期开始时检查存储I，当$I\ge 60$箱时不必补充存储；当$I<60$箱时补充存储使之达到80箱。

其他类型存储问题

第4节

其他类型存储问题

- 概述
  - 本章仅简要介绍了一些基本的存储模型，实际中的很多存储问题远比本章所述模型复杂，求解的方法也多种多样（如线性规划方法、动态规划方法等）。
- 库容有限制的存储问题
  - 见《运筹学（第4版）》428-429页。
  - 利用线性规划的方法求解。
- 两级供应链订货量协调决策模型
  - 见《运筹学（第4版）》429-434页。
- 确定性的多梯次存储模型
  - 见教材265-267页。

Thank you!

谢 谢！