排队论

第十章

生灭过程

第3节

Haiyan Lu
Jiangnan University

生灭过程

- 生灭过程简介
  - 生灭过程 (birth-death process)，是系统在任何时刻的状态为非负整数的一类连续时间随机过程。
  - 生灭过程是用来处理**输入为泊松流、服务时间为负指数分布**这样一类最简单的排队模型的方法。生灭过程排队系统是一类非常重要且广泛存在的排队系统，在生物学、物理学等学科领域广泛存在。
    - 在排队论中，生表示顾客到达，灭表示顾客离去，这样t时刻的系统状态就构成了一个生灭过程。
    - 生灭过程反映了一个排队服务系统的**瞬时状态**随时间变化的规律。

生灭过程

- 生灭过程运动规律
  - 在生灭过程中，生与灭都是随机的，它们的**平均发生率**依赖于系统所处的状态。假设一个生灭过程在时刻t所处的状态为n，则生灭过程的运动遵循以下规律：
    - 在$[t, t+\Delta t)$时间区间内，一个生发生(在大多数排队系统中，即有一个顾客到达)的概率为 $\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$，变量$\lambda_n$称为系统在状态$n$处的**生率**(单位时间内顾客的平均到达率)。
    - 在$[t, t+\Delta t)$时间区间内，一个灭发生(在大多数排队系统中，即有一个服务完成)的概率为 $\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$，变量$\mu_n$称为系统在状态$n$处的**灭率**(单位时间内顾客的平均离去率). 注意: $\mu_0 = 0$.
    - 生与灭是相互独立的，同一时刻只有一个生或灭发生。
  - **备注:**
    - 在$[t, t+\Delta t)$时间区间内, 多于一个事件 (生或灭)发生的概率为$o(\Delta t)$。
    - 对于**M/M/1/∞/∞/FCFS**模型，假定有：

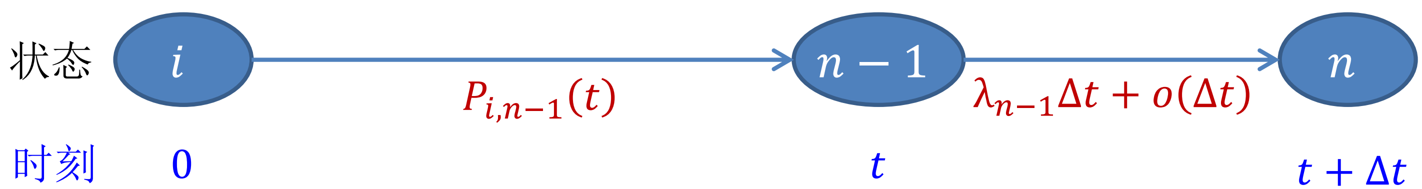
$$\lambda_n = \lambda, n = 0,1,2, \ldots; \quad \mu_0 = 0, \mu_n = \mu, n = 1,2, \ldots$$

生灭过程

- 生灭过程稳态概率的计算
  - 根据生灭过程的运动规律，对于**任一生灭过程**，使得在时刻$t+\Delta t$系统状态为$n\ (n>0)$的方式有四种(见下表，√表示发生，×表示没有发生)：

在时刻t的状态	在时间区间$[t,t+\Delta t)$		在时刻$t+\Delta t$的状态	相应序列事件的概率
	到达(生)	离去(灭)		
$n-1$	√	×	n	$P_{i,n-1}(t)\big(\lambda_{n-1}\Delta t+o(\Delta t)\big)=(I)$
$n+1$	×	√	n	$P_{i,n+1}(t)\big(\mu_{n+1}\Delta t+o(\Delta t)\big)=(II)$
n	×	×	n	$P_{i,n}(t)\big(1-\lambda_n\Delta t-\mu_n\Delta t-2o(\Delta t)\big)=(III)$
其他状态	*	*	n	$o(\Delta t)=(IV)$

  - **以第一种情况(*I*)为例：**



其中，$P_{i,j}(t)$表示给定系统的初始状态(系统在0时刻的状态)为i时，系统在t时刻的状态为j的概率。（后面的推导中设$i=0$，并记$P_{0,j}(t)=P_j(t)$）

生灭过程

- 生灭过程稳态概率的计算
  - 根据生灭过程的运动规律，使得在时刻$t+\Delta t$系统状态为$n\ (n>0)$的方式有四种(见下表)：

在时刻t的状态	在时间区间$[t, t+\Delta t)$		在时刻$t+\Delta t$的状态	相应序列事件的概率
	到达(生)	离去(灭)		
$n-1$	√	×	n	$P_{i,n-1}(t)\big(\lambda_{n-1}\Delta t+o(\Delta t)\big)=(I)$
$n+1$	×	√	n	$P_{i,n+1}(t)\big(\mu_{n+1}\Delta t+o(\Delta t)\big)=(II)$
n	×	×	n	$P_{i,n}(t)\big(1-\lambda_n\Delta t-\mu_n\Delta t-2o(\Delta t)\big)=(III)$
其他状态	*	*	n	$o(\Delta t)=(IV)$

  - 上述四种情况互不相容，因此得到

$$P_n(t+\Delta t)=(I)+(II)+(III)+(IV)$$

整理得到

$$\begin{aligned}&P_n(t+\Delta t)\\&=P_n(t)+\Delta t\big(\lambda_{n-1}P_{n-1}(t)+\mu_{n+1}P_{n+1}(t)-P_n(t)\mu_n-P_n(t)\lambda_n\big)\\&+o(\Delta t)\big(P_{n-1}(t)+P_{n+1}(t)+1-2P_n(t)\big)\\&=P_n(t)+\Delta t\big(\lambda_{n-1}P_{n-1}(t)+\mu_{n+1}P_{n+1}(t)-P_n(t)\mu_n-P_n(t)\lambda_n\big)+o(\Delta t)\end{aligned}$$

生灭过程

- 生灭过程稳态概率的计算（续）
  - 移项，两边除以Δt，并令$\Delta t \to 0$，得到**微分差分方程**(对所有的$n > 0$):

$$P_n'(t) = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - P_n(t)\mu_n - P_n(t)\lambda_n \quad (*)$$

  - 由于当$n = 0$时，有$P_{n-1}(t) = 0$且$\mu_n = 0$，因此对于$n = 0$，我们得到

$$P_0'(t) = \mu_1 P_1(t) - P_0(t)\lambda_0 \quad (**)$$

这是一个**无限系统偏微分方程**，理论上可以求解得到$P_n(t)$，通常实际求解却非常困难。**这里只研究稳态的情况**。

  - 定义**稳态概率**：

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$$

则对充分大的t（和任意初始状态），$P_n(t)$不会出现太大变化，因此可视为常数，从而在稳态下(t充分大)，有：

$$P_n'(t) = 0, P_{n-1}(t) = P_{n-1}, P_{n+1}(t) = P_{n+1}, P_n(t) = P_n$$

代入(*)式，得到对于$n > 0$，有

$$\lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} - P_n\mu_n - P_n\lambda_n = 0$$

即

$$\lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} = P_n(\mu_n + \lambda_n)$$

对于$n = 0$，由(**)式有

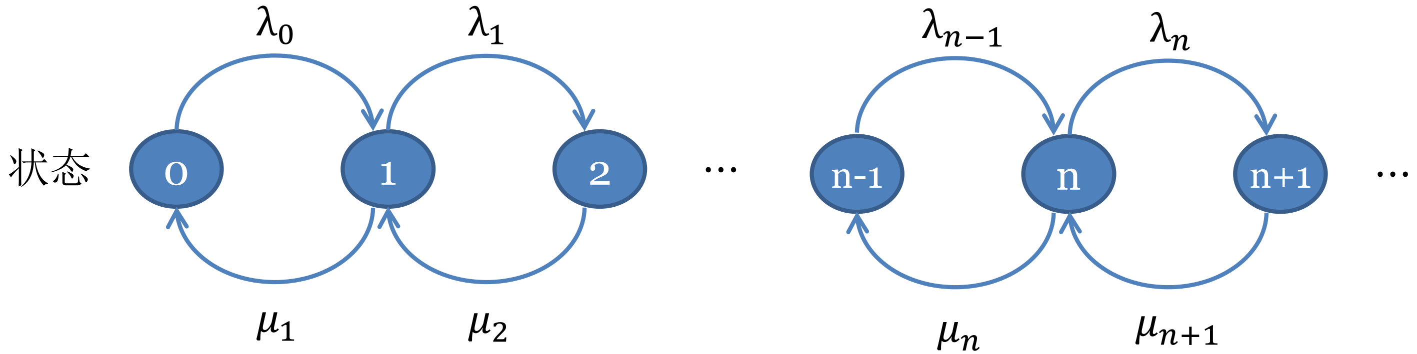
$$\mu_1 P_1 = P_0\lambda_0$$

生灭过程

- 生灭过程的状态平衡方程

$$\begin{cases} \lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} = P_n(\mu_n + \lambda_n) \quad (n = 1,2,\dots) \\ P_1\mu_1 = P_0\lambda_0 \end{cases}$$

- **备注**
  - 生灭过程的状态平衡方程表达了如下一个事实，即在稳态下，进入状态n的转移率必须与离开状态n的转移率**相等**，否则，系统不存在稳态。



  - 可利用生灭过程的状态转移率图，写出状态平衡方程。

生灭过程

- 状态平衡方程的求解
  - 根据

$$\lambda_{n-1}P_{n-1}+\mu_{n+1}P_{n+1}=P_n(\mu_n+\lambda_n)\ \ (n=1,2,\dots)$$
$$P_1\mu_1=P_0\lambda_0$$

  - 写出每个状态的平衡方程，求解可得

$$P_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0,\quad P_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}P_0,\quad \cdots,\quad P_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}P_0$$

令$c_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$，则以上各式可写为：

$$P_n=c_nP_0$$

  - 由$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1$，可得 $P_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\right)=1$
    - 若$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$为有限的，则 $P_0=\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n}$

      从而进一步求得$P_1,P_2,\dots$；
    - 若$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$为无限的，则稳态概率不存在。

Thank you!

谢 谢！