决策论

第十一章

内容提要

- 引言
- 不确定型决策
- 风险决策
- 效用理论在决策中的应用
- 决策树
- 灵敏度分析
- 多目标决策

引 言

第1节

决策论的基本概念

- 决策
  - 决策(Decision Making)，是指为最优地达到目标，对若干个准备行动的方案进行的选择。
- 决策论
  - 决策论(Theory of Decision Making/Decision Theory)，是把第二次世界大战后发展起来的系统理论、运筹学、计算机科学等综合运用于管理决策问题，形成的一门有关决策过程、准则、类型及方法的较为完整的理论体系。
  - 决策理论学派的代表人物，1978年诺贝尔经济学奖获得者西蒙(Herbert Alexander Simon)，有一句名言："Management is decision-making." 就是说管理的核心是决策。

决策的分类

分类方式	类别
按影响范围	战略决策、战役决策、战术决策
按决策环境	确定型决策、不确定型决策、风险型决策
按决策结构	程序化决策、半程序化决策、非程序化决策
按描述方法	定性化决策、定量化决策
按目标数量	单目标决策、多目标决策
按连续性	单级决策、序贯决策
按决策者数量	个人决策、群决策
按问题大小	宏观决策、微观决策

决策的分类

- 按决策结构和解决问题的方式

决策类型	传统方法	现代方法
程序化	现有的规章制度	运筹学、管理信息系统
半程序化	经验、直觉	灰色系统、模糊数学方法等
非程序化	经验、应急创新能力	人工智能、风险应变能力培训

决策过程

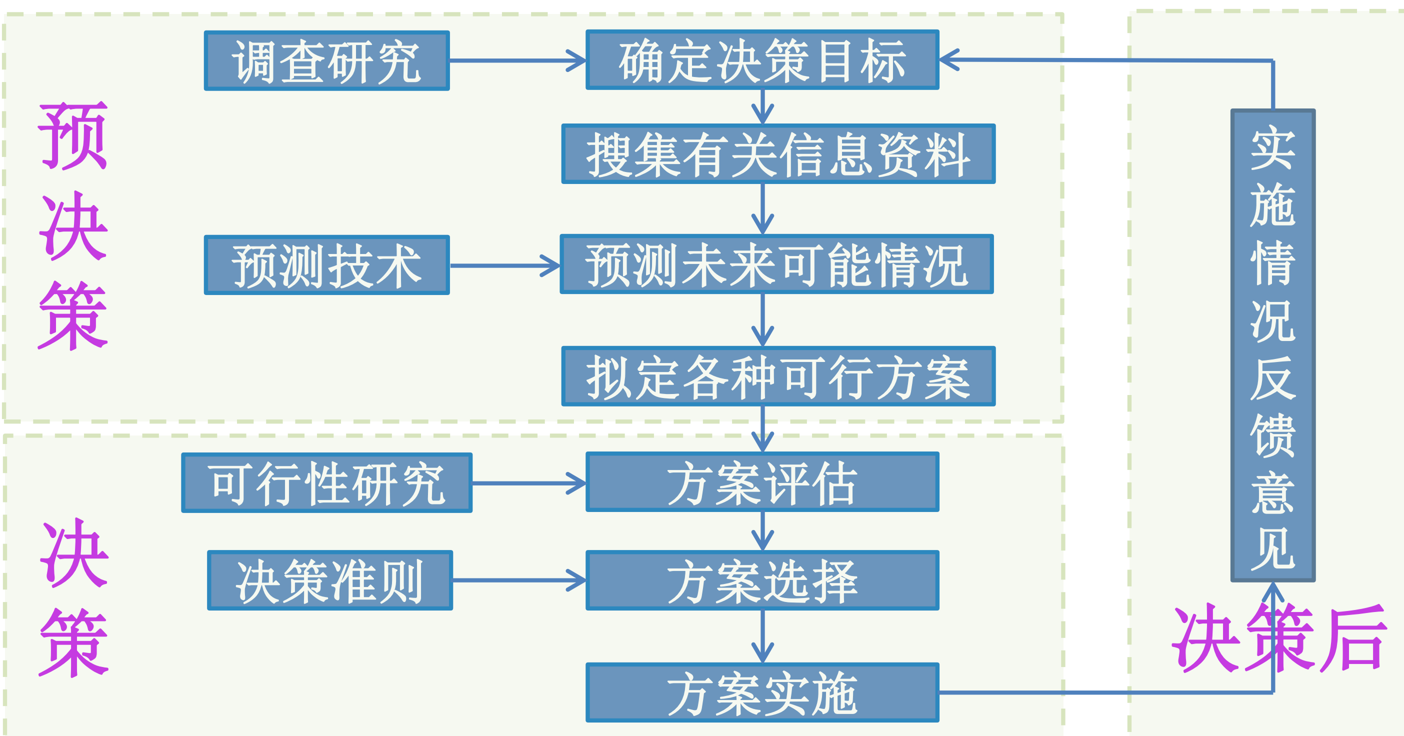
- 构造决策行为模型的两种主要方法
  - 面向决策结果的方法
    - 该方法认为：若决策者能正确地预见到决策结果，其核心是决策的结果和正确的预测。
    - 通常的单目标决策和多目标决策属于这种类型。
    - 该方法的程序比较简单。
  - 面向决策过程的方法
    - 该方法认为：若决策者了解了决策过程，掌握了过程并能控制过程，则他就能正确地预见决策的结果。
    - 该方法一般包括预决策、决策、决策后三个相互依赖的阶段。

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

决 策 过 程

- 面向决策结果的方法

- 面向决策过程的方法



决策模型的要素

- 任何决策问题都由以下要素构成决策模型：
  - 决策者
    - 决策者的任务是进行决策，决策者可以是个人或集体。
  - 可行方案（行动或策略）
    - 参谋人员的任务是提供各种可行方案，包括了解研究对象的属性，确定目的和目标。
      - **属性**是指研究对象的特性，如选拔飞行员时，按身高、年龄、健康状况等数值来表明其属性。
      - **目的**是表明选择属性的方向，如要优秀还是良好。
      - **目标**是给出了参数值的目的，如目的是选择一辆省油的汽车时，则以每公升能行驶60千米为目标。
  - 决策准则
    - 决策准则是衡量选择方案的标准，有单一准则和多准则。

决策模型的要素

- 任何决策问题都由以下要素构成决策模型(续):
  - 事件
    - 事件是指不为决策者所控制的客观存在的将发生的状态。
  - 事件的发生将会带来的结果
    - 如收益或损失
  - 决策者的价值观
    - 如决策者对货币额或不同风险程度的主观价值观念。
- 备注
  - **确定型决策**是指不包含随机因素的决策，每个决策都会得到一个唯一的事先可知的结果。
  - 从决策论的观点来看，前几章讨论的规划论等都是**确定型决策**。本章讨论的都是具有不确定因素和风险的决策。

不确定型决策

第2节

不确定型决策

- 定义
  - 决策者对所面临的问题有若干种方案可以去解决，但对这些方案的执行将出现哪些事件或状态，缺乏必要的信息资料，即决策者对可能出现的状态的概率一无所知。决策者只能根据自己的主观倾向或偏好进行决策。
  - 不同的决策者可以有不同的决策准则，因此同一问题可能就有不同的抉择和结果。
- 准则
  - 悲观主义准则
  - 乐观主义准则
  - 折中主义准则
  - 等可能性准则
  - 最小机会损失准则(亦称最小后悔值准则)

决策矩阵

- 事件集合
  - 即状态集合，是指不以人的意志为转移的客观因素，记为$E=\{E_1,E_2,\dots,E_n\}$.
- 策略集合
  - 即方案集合，记为$S=\{S_1,S_2,\dots,S_m\}$.
- 决策矩阵
  - 每个 **“策略S_i—事件E_j”对**都可以计算出相应的收益值或损失值a_{ij}，所有“策略S_i—事件E_j”对对应的收益或损失值构成的矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$，称为决策矩阵。
  - 根据决策矩阵中元素所示的含义不同，决策矩阵可称为收益矩阵、损失矩阵、损益矩阵、风险矩阵、后悔值矩阵等。

悲观主义(max min)决策准则

- 定义
  - 悲观主义决策准则，又称保守主义决策准则。当决策者面临着各事件的发生概率不清时，决策者考虑可能由于决策错误而造成重大经济损失，他处理问题时比较小心、谨慎。他分析各种最坏的可能结果，从中选择最好者，以它对应的策略为决策策略。
    - 在**收益矩阵**中，先从各策略对应的可能发生的**“策略—事件”对**的结果中选出最小值，将它们列于表的最右列，再从此列的数值中选出最大者，以它对应的策略为决策者应选的决策策略。因此，该准则又称max min准则。
- 数学模型
  - $S_k^* \to \max_i \min_j \{a_{ij}\}$

悲观主义(max min)决策准则

- **例1** 设A工厂以批发方式销售它所生产的产品，每件产品的成本为3元，批发价每件为5元。若每天生产的产品当天销售不完，每件要损失1元。A工厂每天生产的产量可以是0、1000、2000、3000、4000件；根据市场的需要，每天的批发销售量可能为0、1000、2000、3000、4000件，则A工厂的决策者应如何考虑每天的生产量，使它的收入最高。
- 分析：
  - 决策者可以从5种产量方案中任选一种，每种产量方案称为一种策略S_i，$i = 1,2,3,4,5$。
  - 共可发生5种销售情况，销售量分别为0、1000、2000、3000、4000件，但不知其发生的概率，对应事件E_j，$j = 1,2,3,4,5$。
  - 通过计算可求出决策矩阵$(a_{ij})_{5\times5}$。

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

悲观主义(max min)决策准则

- (例1)解：
  - 通过计算，得到损益矩阵为

		销售量（事件）					min	
		0	1000	2000	3000	4000		
产量（策略）	0	0	0	0	0	0	0	← max
	1000	-1000	2000	2000	2000	2000	-1000	
	2000	-2000	1000	4000	4000	4000	-2000	
	3000	-3000	0	3000	6000	6000	-3000	
	4000	-4000	-1000	2000	5000	8000	-4000	

  - 根据**悲观主义准则**，有

$$\max\{0, -1000, -2000, -3000, -4000\} = 0$$

对应的策略为S_1，即“什么也不生产”，在实际中表示先看一看，以后再做决定。

乐观主义(max max)决策准则

- 定义
  - 与持悲观主义决策准则的决策者对待风险的态度不同，当持乐观主义态度的决策者面临情况不明的决策问题时，绝不放弃任何一个可获得最好结果的机会，以争取好中之好的乐观态度来选择决策策略。
    - 在收益矩阵中，先从各策略对应的可能发生的“策略—事件”对的结果中选出最大值，将它们列于表的最右列，再从此列的数值中选出最大者，以它对应的策略为决策者应选的决策策略。因此，该准则又称max max准则。
- 数学模型
  - $S_k^* \to \max_i \max_j \{a_{ij}\}$

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

乐观主义(max max)决策准则

- (例1)解:
  - 通过计算，得到损益矩阵为

		销售量（事件）					max
		0	1000	2000	3000	4000	
产量（策略）	0	0	0	0	0	0	0
	1000	-1000	2000	2000	2000	2000	2000
	2000	-2000	1000	4000	4000	4000	4000
	3000	-3000	0	3000	6000	6000	6000
	4000	-4000	-1000	2000	5000	8000	8000 ← max

  - 根据**乐观主义准则**，有

$$\max\{0,2000,4000,6000,8000\} = 8000$$

对应的策略为S_5。

折中主义准则

- 定义
  - 决策者认为用悲观主义准则或乐观主义准则来处理决策问题太极端，而应把这两种准则给予综合，即进行加权平均来排列方案的优劣次序。
  - 设α为**乐观系数**（表示决策者乐观程度的大小），且$0 \le \alpha \le 1$，并以下式表示相应策略的收益值：

$$H_i = \alpha a_{i_{\max}} + (1-\alpha) a_{i_{\min}}$$

其中$a_{i_{\max}}$、$a_{i_{\min}}$分别表示第i个策略可能得到的最大收益值与最小收益值。

- 数学模型
  - $S_k^* \to \max_i \{H_i\}$

折中主义准则

- (例1)解:
  - 损益矩阵及乐观系数α取不同值时H_i的值见下表

策略		事件E_j					$\max_j\{a_{ij}\}$	$\min_j\{a_{ij}\}$	H_i		
		0	1000	2000	3000	4000			$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=1/3$
S_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_2	1000	-1000	2000	2000	2000	2000	2000	-1000	-100	200	0
S_3	2000	-2000	1000	4000	4000	4000	4000	-2000	-200	400	0
S_4	3000	-3000	0	3000	6000	6000	6000	-3000	-300	600	0
S_5	4000	-4000	-1000	2000	5000	8000	8000	-4000	-400	800	0

  - 根据折中主义准则,
    - 当$\alpha=0.3$时，选取S_1为最优策略;
    - 当$\alpha=0.4$时，选取S_5为最优策略;
    - 当$\alpha=1/3$时，各策略均可为最优策略。

等可能性准则

- 定义
  - 等可能性(Laplace)准则是19世纪数学家Laplace提出来的，他认为：当一个人面临着某事件集合，在无确切理由说明一事件比另一事件有更多发生机会时，只能认为各事件发生的机会是均等的，即每一事件的发生概率均为1/事件数。
  - 决策者计算各策略的期望收益值，然后选择其中最大者对应的策略为最优策略。
- 数学模型
  - $S_k^* \to \max_i \{E(S_i)\}$

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

等可能性准则

- (例1)解：
  - 损益矩阵及各策略按等可能性计算的期望收益值见下表

		销售量（事件）					$E(S_i)$
		0	1000	2000	3000	4000	
产量（策略）	0	0	0	0	0	0	0
	1000	-1000	2000	2000	2000	2000	1400
	2000	-2000	1000	4000	4000	4000	2200
	3000	-3000	0	3000	6000	6000	2400 ← max
	4000	-4000	-1000	2000	5000	8000	2000

  - 根据等可能性准则，有

$$S_k^* \to \max_i\{E(S_i)\} = 2400$$

选取其对应的策略S_4最优策略。

最小机会损失准则

- 定义
  - 最小机会损失准则，又称最小遗憾值(后悔值，regret value)准则，或Savage准则.
  - 首先将收益矩阵中各元素变化为每一“策略–事件”对的机会损失值(遗憾值，后悔值)，得到**机会损失矩阵**。**机会损失值**的含义是：当某一事件发生后，由于决策者没有选用收益最大的策略而形成的损失值。
    - 若发生事件k，各策略的收益为$a_{ik}, i = 1,2,\dots,m$，其中最大者为$a_{lk} = \max_i\{a_{ik}\}$，此时各策略的机会损失值为
    $$a'_{ik} = \max_i\{a_{ik}\} - a_{ik} = a_{lk} - a_{ik}, i = 1,2,\dots,m$$
  - 然后从所有最大机会损失中选取最小者，其对应的策略为最优策略。
- 数学模型
  - $S_k^* \to \min_i \max_j\{a'_{ij}\}$

Haiyan Lu
Jiangnan University

		销售量（事件）				
		0	1000	2000	3000	4000
产量（策略）	0	0	0	0	0	0
	1000	-1000	2000	2000	2000	2000
	2000	-2000	1000	4000	4000	4000
	3000	-3000	0	3000	6000	6000
	4000	-4000	-1000	2000	5000	8000

最小机会损失准则

- (例1)解：
  - 由损益矩阵，计算可得**机会损失矩阵**

机会损失矩阵		销售量（事件）					$\max\limits_{j}\{a'_{ij}\}$
		0	1000	2000	3000	4000	
产量（策略）	0	0	2000	4000	6000	8000	8000
	1000	1000	0	2000	4000	6000	6000
	2000	2000	1000	0	2000	4000	4000
	3000	3000	2000	1000	0	2000	3000 ← **min**
	4000	4000	3000	2000	1000	0	4000

  - 根据**最小机会损失准则**，有

$$S_k^* \to \min_i \max_j \{a'_{ij}\}$$

选取其对应的策略S_4最优策略。

理想决策准则应具备的性质

- 该决策准则应能对所有备选方案作出完整的优劣排序；
- 方案的优劣应同其标号、编号或在备选方案中出现的次序无关；
- 方案的优劣应同其衡量单位无关；
- 如果在所有状态下方案S_l的损益值均优于S_k，则决策准则给出的方案排序必须是S_l优于S_k；
- 当按某一决策准则给出方案的优劣排序后，任一新方案的加入都不应该改变原有方案的优劣次序；
- 损益矩阵的某一列均加上相同的常数，在同一决策准则下将不改变方案原先的优劣排序；
- 交换损益矩阵中两行的位置，不影响相应两个方案的优劣排序；
- 将损益矩阵中的某列数字复制后加到原损益矩阵中，不改变原方案的优劣排序。
    - 备注
        - 前面给出的决策准则，没有一个全部符合上述8项性质条件。
        - 任一决策准则的提出必须经过实践和科学的检验；实践中对决策准则的选择也必须考虑决策环境以及决策者的心理因素等的影响。

风险决策

第3节

风险决策

- 定义
  - 决策者对所选择的方案及方案执行后可能发生的事件有一定的信息。根据决策者的经验或过去的统计资料，可以分析出各事件发生的概率。正因为事件的发生或不发生具有某种概率，所以对决策者来讲要承担一定的风险，故这种类型的决策称为**风险决策**。
  - 不同的决策者可以有不同的决策准则，因此同一问题可能就有不同的抉择和结果。
- 准则
  - 最大期望收益准则（**EMV**）
  - 最小期望机会损失准则（**EOL**）

最大期望收益准则(EMV)

- 定义
  - 决策者通过掌握的信息资料，可以估算出各事件E_j发生的概率p_j；根据各事件的概率及收益矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$计算出各策略S_i的期望收益值$E(S_i)$，并从中选择最大的期望值，以它对应的策略为最优策略。此即最大期望收益准则(Expected Monetary Value, EMV)。
  - EMV决策准则适用于一次决策多次重复进行生产的情况，因此它是平均意义下的最大收益。
- 数学模型
  - $S_k^* \to \max_i\{E(S_i)\} = \max_i\left\{\sum_j p_j a_{ij}\right\}$

最大期望收益准则(EMV)

- (例1)解：
  - 由**收益矩阵**以及各事件的概率，计算可得下表

收益矩阵		事件E_j 0	1000	2000	3000	4000	EMV
		p_j 0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	
策略S_i	0	0	0	0	0	0	0
	1000	-1000	2000	2000	2000	2000	1700
	2000	-2000	1000	4000	4000	4000	2800 ← **max**
	3000	-3000	0	3000	6000	6000	2700
	4000	-4000	-1000	2000	5000	8000	2000

  - 根据**最大期望收益准则**，有

$$S_k^* \to \max_i \{E(S_i)\} = 2800$$

选取其对应的策略S_3最优策略。

最小期望机会损失准则(EOL)

- 定义
  - 决策者通过掌握的信息资料，可以估算出各事件E_j发生的概率p_j；根据各事件的概率及机会损失矩阵$(a'_{ij})_{m\times n}$计算出各策略S_i的期望机会损失值$E'(S_i)$，并从中选择最小的期望值，以它对应的策略为最优策略。此即最小期望机会损失准则(Expected Opportunity Loss, EOL)。
  - EOL决策准则适用于一次决策多次重复进行生产的情况，因此它是平均意义下的最小机会损失。
- 数学模型
  - $S_k^* \to \min_i\{E'(S_i)\} = \min_i\{\sum_j p_j a'_{ij}\}$

最小期望机会损失准则(EOL)

- (例1)解：
  - 由**机会损失矩阵**以及各事件的概率，计算可得下表

机会损失矩阵		事件E_j					EOL
		0	1000	2000	3000	4000	
		p_j					
		0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	
策略S_i	0	0	2000	4000	6000	8000	4000
	1000	1000	0	2000	4000	6000	2300
	2000	2000	1000	0	2000	4000	1200 ← min
	3000	3000	2000	1000	0	2000	1300
	4000	4000	3000	2000	1000	0	2000

  - 根据**最小期望机会损失准则**，有

$$S_k^* \to \min_i\{E'(S_i)\} = 1200$$

选取其对应的策略S_3最优策略。

Haiyan Lu
Jiangnan University

EMV与EOL决策准则的关系

- EMV与EOL本质相同
  - 举例说明：
    - 以类似例1的生产销售决策问题为例。设决策的收益矩阵为$(a_{ij})_{n\times n}$，则由收益矩阵的构造可知，在收益矩阵对角线上的值都是其所在列的最大者。因此，机会损失矩阵可通过以下方式求得：

S_i	E_1	E_2	$\cdots$	E_n
	p_1	p_2	$\cdots$	p_n
S_1	$a_{11}-a_{11}$	$a_{22}-a_{12}$	$\cdots$	$a_{nn}-a_{1n}$
S_2	$a_{11}-a_{21}$	$a_{22}-a_{22}$	$\cdots$	$a_{nn}-a_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	$a_{11}-a_{n1}$	$a_{22}-a_{n2}$	$\cdots$	$a_{nn}-a_{nn}$

EMV与EOL决策准则的关系

- EMV与EOL本质相同
  - 举例说明（续）：
    - 策略S_i的期望机会损失为

$$\mathrm{EOL}_i = p_1(a_{11} - a_{i1}) + p_2(a_{22} - a_{i2}) + \cdots + p_n(a_{nn} - a_{in})$$
$$= p_1 a_{11} + p_2 a_{22} + \cdots + p_n a_{nn} - (p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \cdots + p_n a_{in})$$
$$= K - \mathrm{EMV}_i$$

其中$K = p_1 a_{11} + p_2 a_{22} + \cdots + p_n a_{nn}$与$i$无关，而

$$\mathrm{EMV}_i = p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \cdots + p_n a_{in}$$

故当EMV最大时，EOL即为最小。

因此，在决策时用这两个决策准则所得结果相同。

完全信息的价值

- 问题的提出
  - EMV 和EOL决策准则主要是针对一次决策后多次重复的情况，因此在每次生产销售活动中，有时为得，有时为失，得失相抵后使平均收益为最大。此为“以不变应万变”。
  - 若能正确地预测每天的需求量，并按预测数据安排生产，做到“随机应变”，则需花费一定费用进行调查研究。
    - **问题：花费多少费用进行调查预测才算合理？**
- 解决的方法
  - 可以通过研究**完全信息的期望价值**来解决。
  - 完全信息(Perfect Information)是指：不确定事件(uncertain events)仍以一定的概率发生，但决策者掌握的信息使之能**在决策前**确切了解到底哪个事件会发生。

Haiyan Lu
Jiangnan University

		销售量（事件）				
		0	1000	2000	3000	4000
产量（策略）	0	0	0	0	0	0
	1000	-1000	2000	2000	2000	2000
	2000	-2000	1000	4000	4000	4000
	3000	-3000	0	3000	6000	6000
	4000	-4000	-1000	2000	5000	8000

完全信息的价值

- 举例说明
  - 仍以**例1**为例，若A工厂的决策者通过预测调查，能确切了解每天的需求量，并依此安排每天的产量，得到的收益的期望值比不进行调查预测时高。此时的收益值称为**具有完全信息的期望收益值**（Expected Profit with Perfect Information, EPPI）。计算情况见下表：

事件	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	EPPI
	0	1000	2000	3000	4000	
概率p_j	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	
具有完全信息时的最优策略	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	0	1000	2000	3000	4000	
具有完全信息时的收益a_j	0	2000	4000	6000	8000	
$\sum_j p_j a_j$	0	400	1600	1200	800	4000

  - 完全信息的期望价值(Expected Value of Perfect Information, EVPI)

$$\text{EVPI} = \text{EPPI} - \text{EMV}^* = 4000 - 2800 = 1200(\text{元})$$

  - 因此用于调查预测的费用不能超过EVPI。否则，说明调查预测已失去了实际的经济价值。

先验概率

- 定义
  - 风险决策时决策者要估计各事件出现的概率，而许多事件根本无法进行重复试验，其概率不能通过随机试验去确定。如估计某企业倒闭的可能性，**只能由决策者根据他对这个事件的了解去估计**。这样确定的概率反映了决策者对事件出现的信念程度，称为**主观概率**(subjective probability)，又称**先验概率**(prior probability)。
    - 备注
      - 客观概率论者认为概率如同重量、容积、硬度等一样，是研究对象的物理属性。
      - 主观概率论者认为概率是人们对现象的知识的现状的测度，而不是现象本身的测度，因此不是研究对象的物理属性。确定主观概率时一般采用专家估计法。

贝叶斯公式和后验概率

- 贝叶斯公式
  - 贝叶斯定理是概率论中的一个定理，这一定理可用一个数学公式来表达，该公式就是著名的贝叶斯公式。
    - 贝叶斯公式是由英国牧师、业余数学家**贝叶斯**(Thomas Bayes, 1701-1761)提出的，相应公式及论著于1763年发表。
- 后验概率——对(先验)概率的修正
  - 假设$A_1, A_2, \dots, A_n$是某个过程的n种可能的前提，$P(A_i)$是人们事先对各前提条件出现可能性大小的估计，称为**先验概率**。若这个过程得到一个**结果B**，则**贝叶斯公式**提供了**根据B的出现而对前提条件作出新评价的方法**。
  - $P(A_i|B)$即是**在B发生的条件下**对A_i的概率的重新认识，称$P(A_i|B)$为后验概率 (posterior probability) 。

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

贝叶斯公式和后验概率

- 后验概率的计算

  (1) 先由过去的经验或专家估计获得将发生事件的先验概率。

  (2) 根据调查或实验计算得到条件概率，利用贝叶斯公式计算出各事件的后验概率：

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}$$

- 贝叶斯决策
  - 贝叶斯决策是贝叶斯公式在决策中的应用。
    - 贝叶斯决策就是在不完全信息下，对部分未知的状态用先验概率估计，然后用贝叶斯公式对先验概率进行修正得到后验概率，最后再利用期望值和后验概率作出最优决策。

贝叶斯公式和后验概率

- 例2 某钻探大队在某地区进行石油勘探，主观估计该地区有油的概率为$P(O)=0.5$，无油的概率为$P(D)=0.5$。为了提高钻探的效果，先做地震试验。根据积累的资料得知：凡有油地区做实验结果好的概率为$P(F|O)=0.9$，做实验结果不好的概率为$P(U|O)=0.1$；凡无油地区做实验结果好的概率为$P(F|D)=0.2$，做实验结果不好的概率为$P(U|D)=0.8$。问在该地区做实验后，有油与无油的概率各是多少？
- **解：**
  - 先计算做地震试验后**结果好**与**结果不好**的概率（利用**全概公式**）：
    做地震试验结果好的概率
    $$P(F)=P(F|O)P(O)+P(F|D)P(D)$$
    $$=0.9\times 0.5+0.2\times 0.5=0.55$$
    做地震试验结果不好的概率
    $$P(U)=P(U|O)P(O)+P(U|D)P(D)$$
    $$=0.1\times 0.5+0.8\times 0.5=0.45$$

贝叶斯公式和后验概率

- (例2)解(续):
  - 再利用**贝叶斯公式**计算各事件的**后验概率**。
    做地震试验结果好的条件下有油的概率
    $$P(O|F)=\frac{P(O)P(F|O)}{P(F)}=\frac{0.5\times 0.9}{0.55}=\frac{9}{11}$$
    做地震试验结果好的条件下无油的概率
    $$P(D|F)=\frac{P(D)P(F|D)}{P(F)}=\frac{0.5\times 0.2}{0.55}=\frac{2}{11}$$
    做地震试验结果不好的条件下有油的概率
    $$P(O|U)=\frac{P(O)P(U|O)}{P(U)}=\frac{0.5\times 0.1}{0.45}=\frac{1}{9}$$
    做地震试验结果不好的条件下无油的概率
    $$P(D|U)=\frac{P(D)P(U|D)}{P(U)}=\frac{0.5\times 0.8}{0.45}=\frac{8}{9}$$

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

贝叶斯公式和后验概率

- (例2)解(续):
  - 上述计算可以在下图中进行:

先验概率	条件概率	联合概率	无条件概率	后验概率
有油 $P(O)=0.5$	有油实验结果好 $P(F\|O)=0.9$	$P(O\cap F)=0.45$	$P(F)=0.55$	$P(O\|F)=9/11$
	有油实验结果不好 $P(U\|O)=0.1$	$P(O\cap U)=0.05$		$P(D\|F)=2/11$
无油 $P(D)=0.5$	有油实验结果好 $P(F\|D)=0.2$	$P(D\cap F)=0.10$	$P(U)=0.45$	$P(O\|U)=1/9$
	有油实验结果不好 $P(U\|D)=0.8$	$P(D\cap U)=0.40$		$P(D\|U)=8/9$

效用理论在决策中的应用

第4节

效用及效用曲线

- 效用
  - 效用(Utility)是经济学中最常用的概念之一。一般而言，效用是指对于消费者通过消费或者享受闲暇等使自己的需求、欲望等得到的满足的一个度量。
    - 效用的概念是丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli）在解释圣彼得堡悖论（丹尼尔的表兄尼古拉·伯努利（Nicolaus Bernoulli）故意设计出来的一个悖论）时提出的，目的是挑战以**货币期望值最大**作为决策的准则。他认为人们对其钱财的真实价值的考虑与他的钱财拥有量之间有**对数关系**。
      - 圣彼得堡悖论对于决策工作者的启示在于，许多悖论问题可以归结为数学问题，但它同时又是一个思维科学和哲学问题。悖论问题的实质是人类自身思维的矛盾性。
    - 丹尼尔·伯努利在1738年的论文里提出了**最大期望效用值准则**，即：在风险和不确定条件下，个人的决策准则是为了获得最大期望效用值而非最大期望货币值。

效用及效用曲线

- 效用曲线
  - 在风险决策中，可用**效用**指标来衡量决策者对待风险的态度，给每个决策者测定其对待风险的态度的效用曲线(函数)。
  - 效用是一个无量纲指标，通过效用这个指标可将某些难于量化有质的区别的事物（事件）予以量化。
    - 如某人面临多种方案的选择工作时，要考虑工作地点、工作性质、单位福利等。可将要考虑的因素都折合为效用值，得到各方案的综合效用值，然后选择效用值最大的方案。
  - 在风险情况下，只作一次决策时，再用最大期望值决策准则就不合理了。此时可用最大效用值准则来进行决策。

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

效用及效用曲线

- 效用曲线的确定
  - 直接提问法
    - 向决策者提出一系列问题，要求决策者进行主观衡量并作出回答。由于提问与回答的不确切性，该法应用较少。
  - 对比提问法
    - 设决策者面临两种可选方案A_1, A_2。A_1表示他可无任何风险地得到一笔金额x_2； A_2表示他可以概率p得到一笔金额x_1，或以概率$1-p$损失金额x_3； 且$x_1 > x_2 > x_3$.
    - 设$U(x)$表示金额x的效用值，若在某条件下，该决策者认为A_1, A_2两方案等价，则可表示为

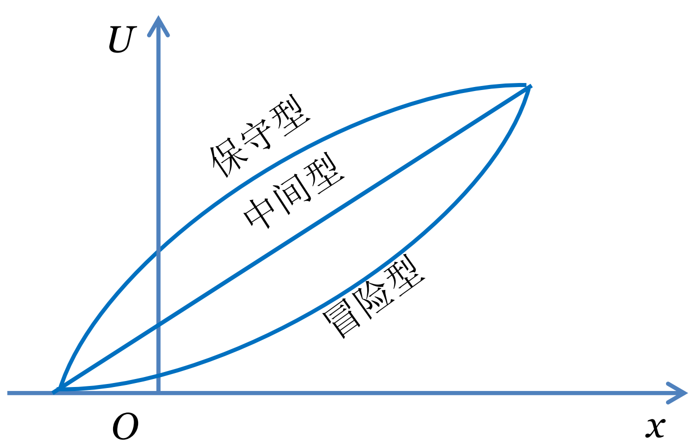
$$pU(x_1) + (1-p)U(x_3) = U(x_2)$$

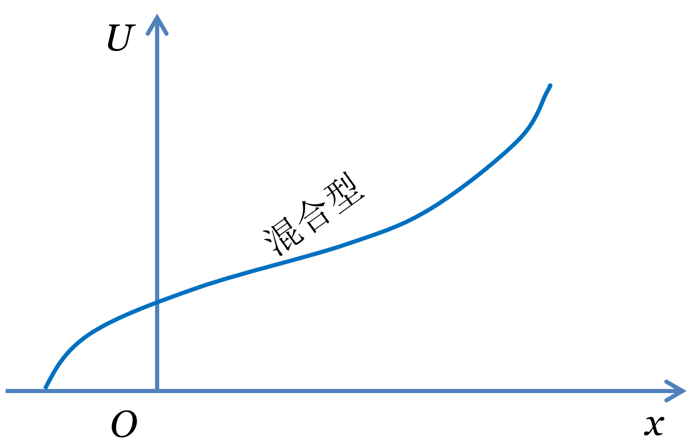
即该决策者认为x_2的效用值等于x_1, x_3的效用期望值。于是可以用对比提问法来测定决策者的风险效用曲线。

      - 上式中有x_1, x_2, x_3, p四个变量，若其中任意三个变量为已知时，向决策者提问第四个变量应取何值，并请决策者主观判断第四个变量应取的值是多少。
      - 提问方式大致有三种，参见《运筹学（清华，第四版）》492-493页。

效用及效用曲线

- 效用曲线与决策者对待风险的态度的关系
  - 不同形状的效用曲线，表示了不同决策者对待风险的不同态度。每个人对待风险的态度，除个人的性格等因素外，与他的财产地位、经济状况密切相关。
    - **保守型**：对损失的增加较敏感，对收入的增加较迟钝，不愿承受损失的风险。
    - **中间型**：认为收入金额的增长与效用值的增长呈正比关系。
    - **冒险型**：对收入的增加较敏感，对损失的增加较迟钝，可以承担损失的风险。
    - **混合型**：以上是三种典型态度，也有决策者兼有多种类型。





决 策 树

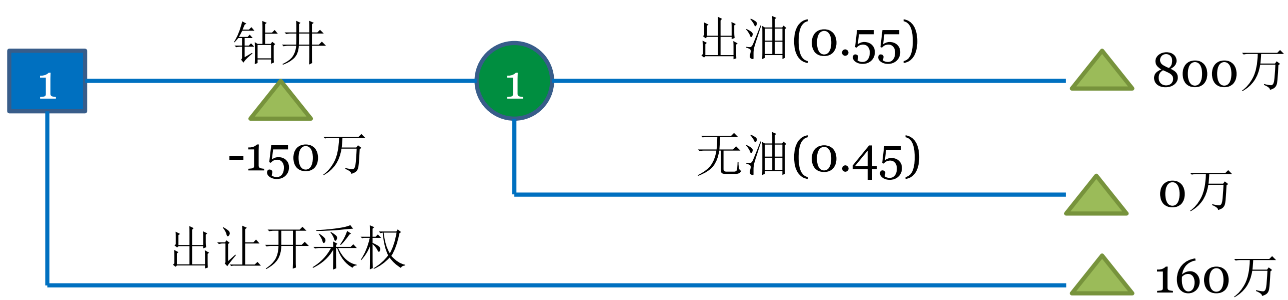
第5节

决策树

- 序贯决策
  - 有些决策问题，当进行决策后又产生一些新情况，并需要进行新的决策，接着又有一些新情况，又需要进行新的决策，如此决策、情况、决策、情况……构成一个决策序列，这就是**序贯决策**。
    - 对于序贯决策，再用决策矩阵进行分析时，容易使表格关系十分复杂。
- 决策树
  - 描述序贯决策的有力工具之一是决策树(decision tree)，决策树是由决策点、事件点以及事件结果构成的树形图。
  - 一般选用最大期望收益值、最大期望效用值或最大效用值为决策准则。

决策树

- 例3 某石油公司拟在一片估计含油的荒地上钻探。如果钻井，费用为150万；若出油（概率为0.55）收入为800万，若无油（概率为0.45）则收入为0。该公司也可转让开采权，转让费为160万，但公司可不承担任何风险。问该公司应如何决策，使其期望收益值最大？
- 解：
  - 该决策问题可以用**决策树**来描述，如下图所示，其中□表示决策点；○表示事件点；△表示收益（点），负值表示支付。
  - **决策树的计算**采用**逆序方法**。先计算事件点①的期望收入：800×0.55+0×0.45=440万元；若采用钻井策略，则期望收入为440-150=290万元；再在决策点$\boxed{1}$处, 按max{290,160}=290, 决定该公司的最优策略为**钻井**，其期望收益值为290万元。



决策树

- 例4 在例3中虽然公司采用钻井的策略，其期望收益是290万元，但要冒45%的风险（无油时）损失150万元（钻井费用）。因此，公司考虑通过地震试验获取更多信息，地震试验费用需20万元。
  - 在已知有油情况下，地震试验显示油气好的概率为0.8，显示油气不好的概率为0.2；
  - 在已知无油情况下，地震试验显示油气好的概率为0.15，显示油气不好的概率为0.85。
  - 当试验表明油气好时，出让开采权费用将增至400万元；
  - 当试验表明油气不好时，出让开采权费用降至100万元。

试重新用决策树的方法找出该公司期望收入为最大的决策。

决策树

- (例4)解：
  - 该公司面临的是一个**两阶段决策问题**：第一阶段决定要不要做试验；第二阶段为在做地震试验条件下，当油气显示分别为好与不好时，是采取钻井策略还是出让开采权。
  - 设A_1表示有油，A_2表示无油，B_1表示地震试验油气显示好，B_2表示地震试验油气显示不好。由题意，有：

$$P(A_1)=0.55, \qquad P(A_2)=0.45$$
$$P(B_1|A_1)=0.8, \qquad P(B_2|A_1)=0.2$$
$$P(B_1|A_2)=0.15, \qquad P(B_2|A_2)=0.85$$

由全概公式，可得：

$$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)$$
$$=0.55\times 0.8+0.45\times 0.15=0.5075$$

$$P(B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)$$
$$=0.55\times 0.2+0.45\times 0.85=0.4925$$

决 策 树

- (例4)解（续）：
  - 由贝叶斯公式，计算**后验概率**：

$$P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B_1)}=\frac{0.44}{0.5075}=0.867$$

$$P(A_2|B_1)=\frac{P(A_2)P(B_1|A_2)}{P(B_1)}=\frac{0.0675}{0.5075}=0.133$$

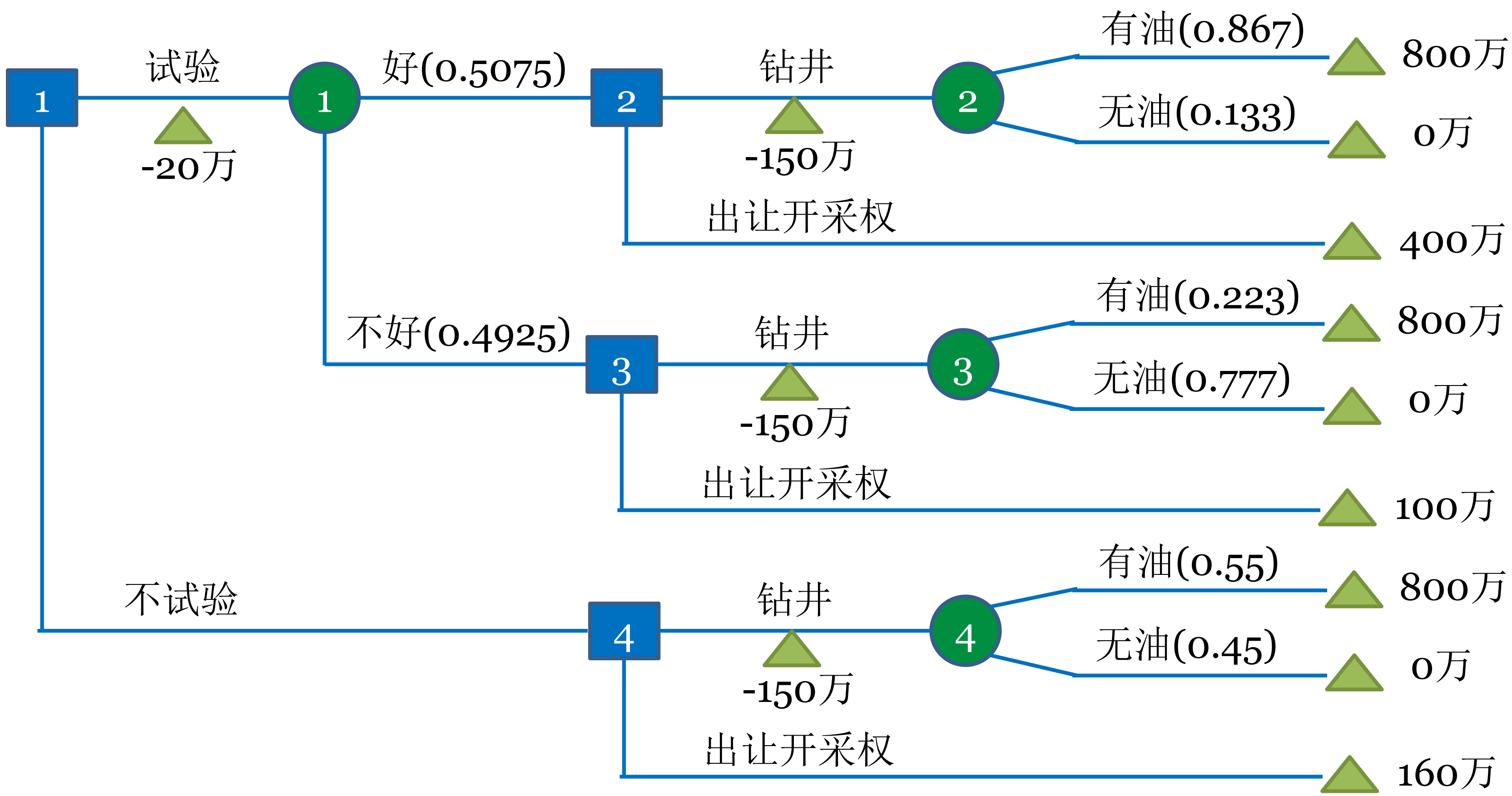
$$P(A_1|B_2)=\frac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(B_2)}=\frac{0.11}{0.4925}=0.223$$

$$P(A_2|B_2)=\frac{P(A_2)P(B_2|A_2)}{P(B_2)}=\frac{0.3825}{0.4925}=0.777$$

绘制**决策树**，并将上述后验概率标注在决策树上，得到下图。

决策树

- (例4)解（续）：
  - 决策树图如下：



决策树

- (例4)解（续）：
  - 采用**逆决策顺序**的方法求解，步骤如下：

先计算事件点2, 3, 4的收入期望值：

事件点2：$800 \times 0.867 + 0 \times 0.133 = 693.6$万

事件点3：$800 \times 0.223 + 0 \times 0.777 = 178.4$万

事件点4：$800 \times 0.55 + 0 \times 0.45 = 440$万

按最大收益期望值准则，给出决策点2, 3, 4处的决策：

决策点2：$\max\{693.6 - 150, 400\} = 543.6$万，故选择钻井策略；

决策点3：$\max\{178.4 - 150, 100\} = 100$万，故选择出让开采权策略；

决策点4：$\max\{440 - 150, 160\} = 290$万，故选择钻井策略。

计算事件点1的收入期望值： $543.6 \times 0.5075 + 100 \times 0.4925 = 325.13$万

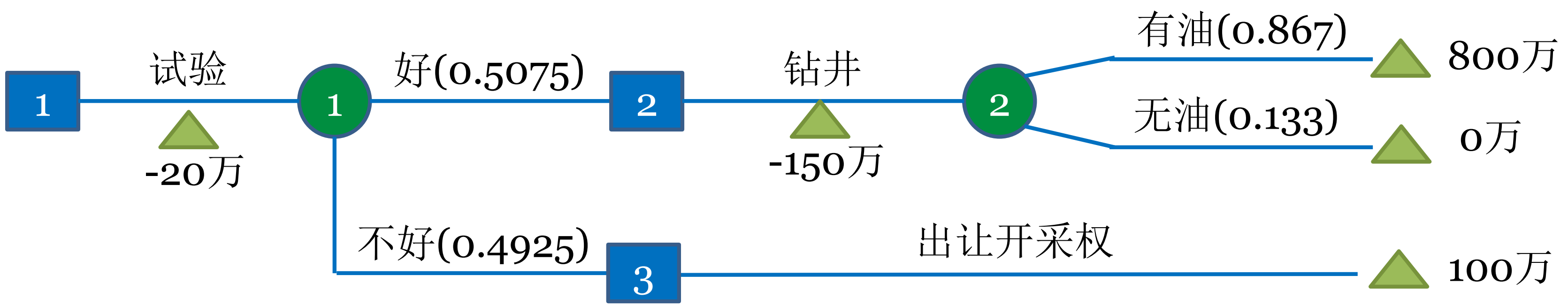
按最大收益期望值准则，给出在决策点1处的决策：

$\max\{325.13 - 20, 290\} = 305.13$万，故选择进行地震试验策略。

决 策 树

- (例4)解（续）：
  - 因此，使该公司期望收入为最大的**决策（序列）**是：

先进行地震试验，当试验结果为油气显示好时，选择钻井；油气显示不好时，选择出让开采权。在该决策序列下，期望收入为305.13万。



- **备注**
  - 比较进行地震试验和不进行地震试验得到的期望收入，其差值为

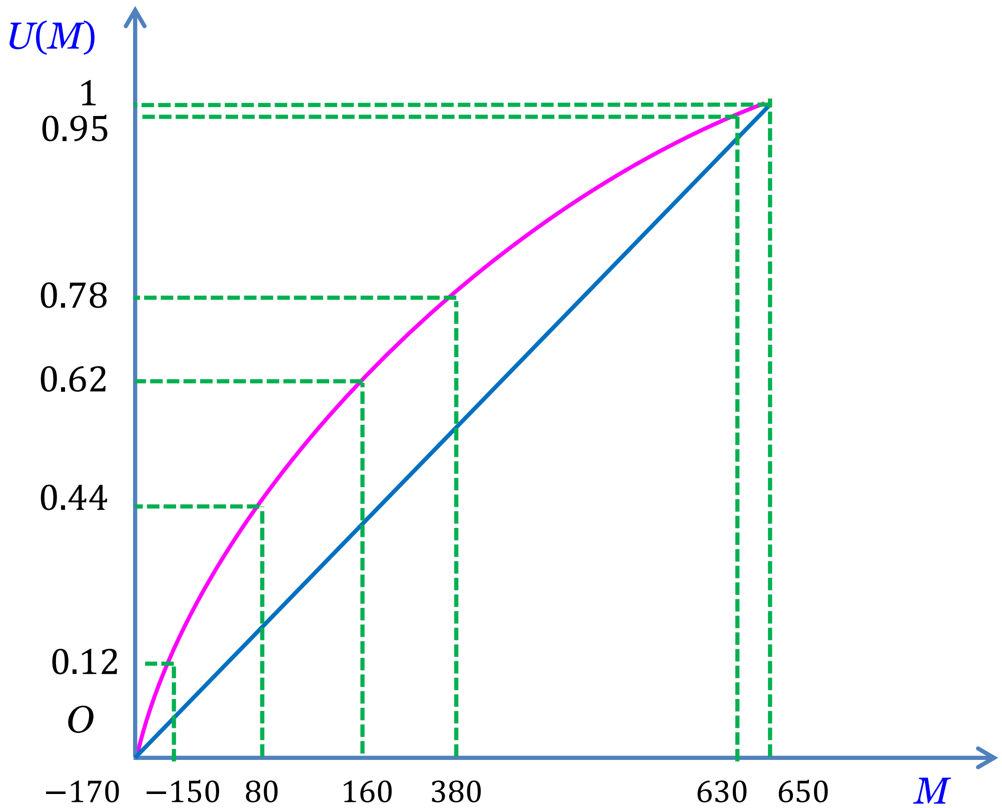
$$325.13 - 290 = 35.13\text{万}$$

此即补充信息所获取的价值。

  - 由于$35.13 > 20$，即补充信息所增加的收入大于为获取补充信息所支付的费用，故例4中进行地震试验是有利的。

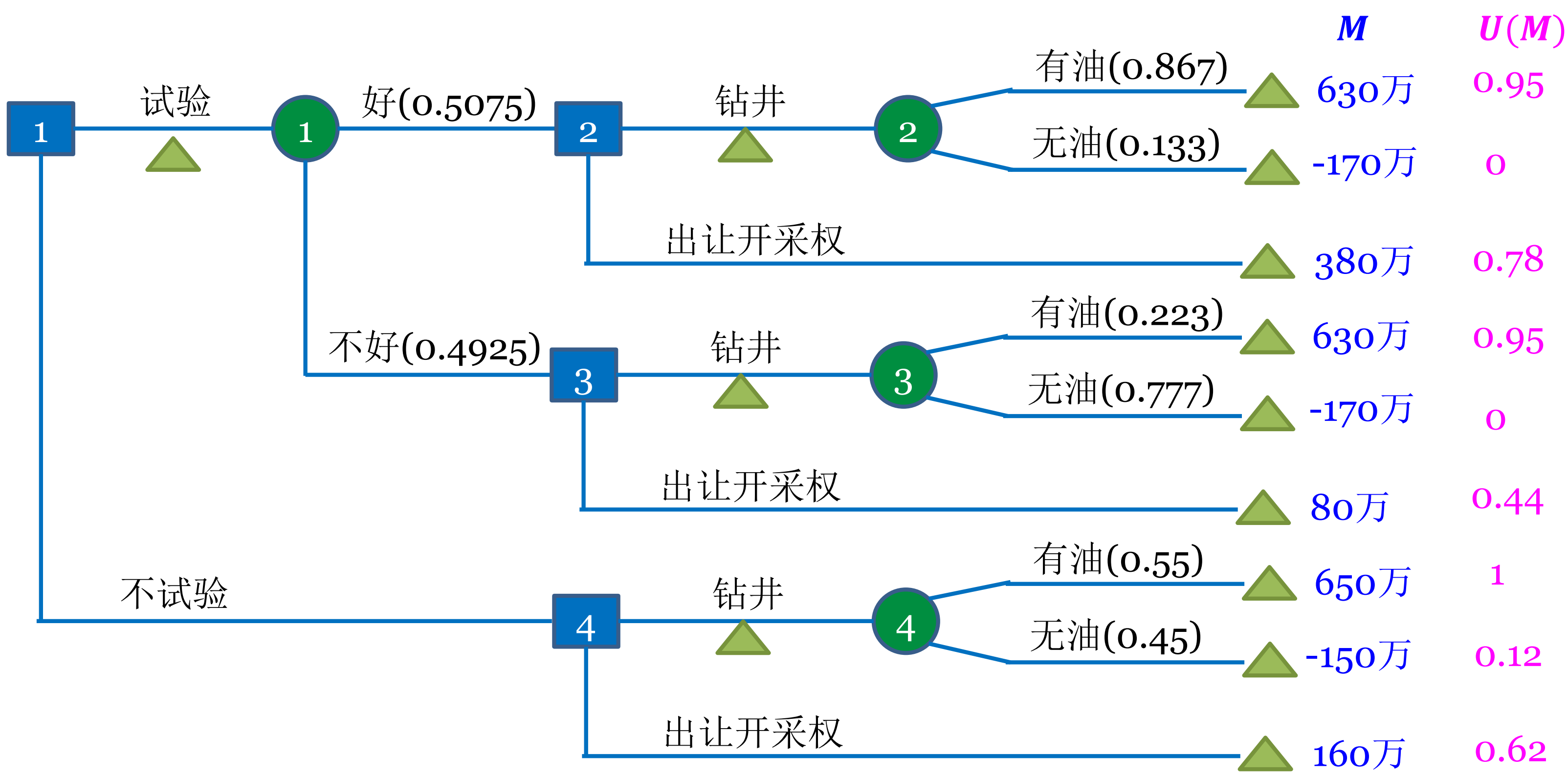
决 策 树

- 例5 设例4中公司决策者的效用曲线如下图所示，试根据期望收入的效用值最大准则重新确定该公司的最优策略。



决策树

- (例5)解:
  - 绘制该问题的决策树，且把试验、钻井等费用都反映到最右端的收益点上，找出各收益值对应的**效用值**标注在右侧，见下图。



决策树

- (例5)解（续）：
  - 采用**逆决策顺序**的方法求解，步骤如下：

    先计算事件点2, 3, 4的效用期望值：

    事件点2：$0.95 \times 0.867 + 0 \times 0.133 = 0.824$

    事件点3：$0.95 \times 0.223 + 0 \times 0.777 = 0.212$

    事件点4：$1 \times 0.55 + 0.12 \times 0.45 = 0.604$

    按最大效用期望值准则，给出决策点2, 3, 4处的决策：

    决策点2：$\max\{0.824, 0.78\} = 0.824$，故选择钻井策略；

    决策点3：$\max\{0.212, 0.44\} = 0.44$，故选择出让开采权策略；

    决策点4：$\max\{0.604, 0.62\} = 0.62$，故选择出让开采权策略。

    计算事件点1的效用期望值：$0.824 \times 0.5075 + 0.44 \times 0.4925 = 0.635$

    按最大效用期望值准则，给出在决策点1处的决策：

    $\max\{0.635, 0.62\} = 0.635$，故选择进行地震试验策略。
  - 因此，按照**最大期望效用值准则**重新确定的最优策略仍为：**先进行地震试验，当试验结果为好时进行钻井；当试验结果不好时应出让开采权**。

    （显然该策略为保守型的，因为决策者的效用曲线是保守型的。）

灵敏度分析

第6节

灵敏度分析的意义

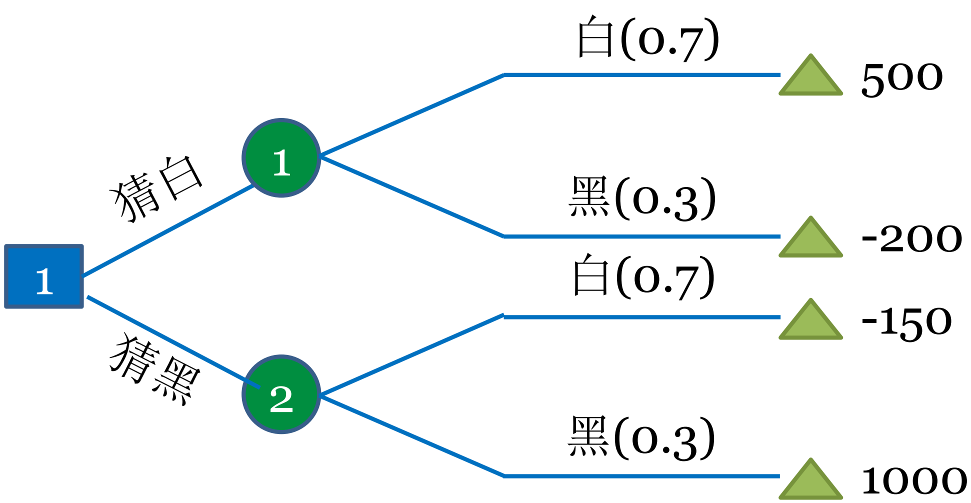
- 在决策模型中，自然状态的概率和损益值通常由估计或预测得到，不可能十分正确；此外，实际情况也在不断变化。因此，需要分析当决策所用的数据在多大范围内变动，可使得原最优方案继续有效。这类分析称为**灵敏度分析**。

- 例6 假设有外表完全相同的木盒100只，将其分为两组，一组内装白球，有70盒，另一组内装黑球，有30盒。现从这100盒中任取一盒，请你猜。若这盒内装的是白球，猜对了得500分，猜错了罚150分；若这盒内装的是黑球，猜对了得1000分，猜错了罚200分。为使期望得分最多，应选哪一方案？有关数据见下表：

方案	自然状态（概率）	
	白 (0.7)	黑 (0.3)
猜白	500	-200
猜黑	-150	1000

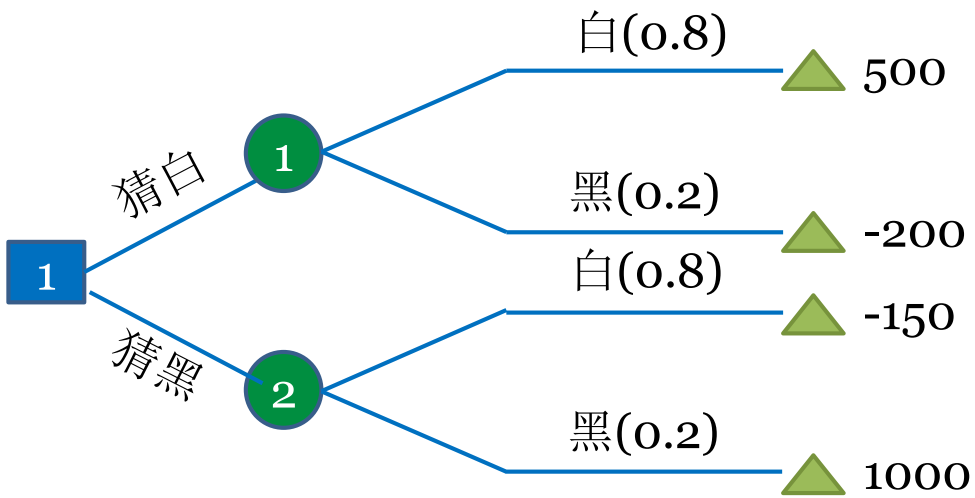
灵敏度分析

- (例6)解：
  - 先画出决策树，见下图。
  - 计算各方案的期望值：
    - “猜白”的期望值为 $0.7 \times 500 + 0.3 \times (-200) = 290$；
    - “猜黑”的期望值为 $0.7 \times (-150) + 0.3 \times 1000 = 195$
  - 经比较可知“猜白”方案为最优方案。



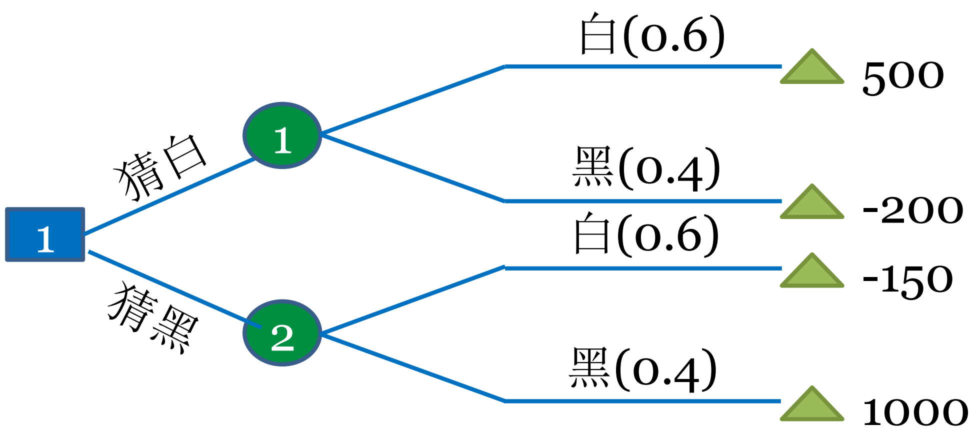
灵敏度分析

- (例6)分析：
  - 假定出现白球的概率从0.7变为0.8，求此时的最优方案。
  - 先画出决策树，见下图。
  - 计算各方案的期望值：
    - “猜白”的期望值为 $0.8 \times 500 + 0.2 \times (-200) = 360$；
    - “猜黑”的期望值为 $0.8 \times (-150) + 0.2 \times 1000 = 80$
  - 经比较可知“猜白”方案仍为最优方案。



灵敏度分析

- (例6)分析：
  - 再假定出现白球的概率从0.7变为0.6，求此时的最优方案。
  - 先画出决策树，见下图。
  - 计算各方案的期望值：
    - “猜白”的期望值为 $0.6 \times 500 + 0.4 \times (-200) = 220$；
    - “猜黑”的期望值为 $0.6 \times (-150) + 0.4 \times 1000 = 310$
  - 经比较可知“猜黑”方案为最优方案。



- **思考**：自然状态概率的变化，可引起最优方案的改变。如何确定使最优方案发生改变的自然状态的概率转折点，即**转折概率**？

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

转折概率

- 举例说明
  - 以例6为例进行说明。设白球出现的概率为 p，则黑球出现的概率为 $1-p$。当“猜白”与“猜黑”两个方案的期望值相等时，即

    $$p \times 500 + (1-p) \times (-200) = p \times (-150) + (1-p) \times 1000$$

    求得$p = 0.6486$，此即**转折概率**。
  - 一般地，转折概率 p可表示为

    $$p = \frac{a_{12} - a_{22}}{a_{12} - a_{22} + a_{21} - a_{11}}$$

  - 若这些数据在某允许范围内变动，而最优方案保持不变，则该方案就是比较稳定的；若这些数据在某允许范围内稍加变动，最优方案就发生改变，则该方案就是不稳定的。由此可找到那些非常敏感的变量和不太敏感的变量，以及在最优方案不变条件下，这些变量的允许变化范围。

方案	自然状态（概率）	
	白 (p)	黑 $(1-p)$
猜白	a_{11}	a_{12}
猜黑	a_{21}	a_{22}

Haiyan Lu
Jiangnan University

多目标决策

第7节

多目标决策概述

- 单目标决策与多目标决策
  - 考虑单目标决策时，只要比较任意两个解对应的目标函数值，就能确定孰优孰劣（目标函数值相等时除外）
  - 多目标情况下，由于目标间的不可公度性和目标间相互存在的矛盾，对问题的处理及求解方法则广泛复杂得多。
- 多目标决策的分类
  - 按问题中备选方案的数量，可将多目标决策分为两类：
    - 多属性(multi-attribute)决策问题
      - 方案的决策变量离散，备选方案有限。
    - 多目标(multi-objective)决策(优化)问题
      - 方案的决策变量连续，备选方案无限。

多属性决策问题的求解

- 多属性问题的求解，首先是对目标度量的属性的设计，其次是对各属性值的衡量，最后是综合比较。
- 由于各属性间不可能用同一单位度量，以及各方案属性间的不协调性，因此多属性决策的步骤可分为以下步骤：
  - 属性的设计
  - 数据的预处理
  - 方案的筛选
  - 方案的选择

多属性决策问题的求解

- 属性的设计
  - 进行属性设计，采集相关数据，列出如下决策矩阵(见下表)，表中a_{ij}为第i个方案第j个属性的属性值。

S_i	属性			
	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
S_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
S_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

多属性决策问题的求解

- 数据的预处理
  - 对数据进行预处理，是为了清除数据量纲及极差的不一致性，以便进行统一比较。
  - 设经处理后的数据矩阵为$(x_{ij})_{m\times n}$(效益型矩阵为数字越大越好，成本型矩阵为数字越小越好)，各种数据处理方法的计算公式如下：
    - (1)线性变换
      - 效益型数据 $x_{ij}=a_{ij}/a_j^{\max}$
      - 成本型数据 $x_{ij}=1-a_{ij}/a_j^{\max}$

      其中 $a_j^{\max}=\max\limits_i\{a_{ij}\}$

多属性决策问题的求解

- 数据的预处理
  - (2)标准0-1变换(极差变换)
    - 效益型数据 $x_{ij}=\dfrac{a_{ij}-a_j^{\min}}{a_j^{\max}-a_j^{\min}}$
    - 成本型数据 $x_{ij}=\dfrac{a_j^{\max}-a_{ij}}{a_j^{\max}-a_j^{\min}}$

    其中 $a_j^{\min}=\min\limits_i\{a_{ij}\}$
  - (3)规范化处理
    - 数据不分效益型或成本型，均令

$$x_{ij}=a_{ij}\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_{ij}^2}$$

其特点为同一属性数据经处理后的平方和为1，但处理后的数据无法分辨属性的优劣。

多属性决策问题的求解

- 数据的预处理
  - (4)某些属性数据要求最好位于区间$[a_2, a_3]$内，且不得低于a_1或大于a_4，此时可令

$$x_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij} - a_1}{a_2 - a_1}, \text{当} a_1 \le a_{ij} \le a_2 \\ 1, \qquad\qquad \text{当} a_2 \le a_{ij} \le a_3 \\ \dfrac{a_4 - a_{ij}}{a_4 - a_3}, \text{当} a_3 \le a_{ij} \le a_4 \\ 0, \text{当} a_{ij} < a_1 \text{或} a_{ij} > a_4 \end{cases}$$

  - (5)对定性数值的量化处理可参考下表进行转换

定性数值	很低	较低	低	中	较高	高	很高
效益型	1	2	3	4	5	6	7
成本型	7	6	5	4	3	2	1

多属性决策问题的求解

- 方案的筛选
  - (1)淘汰劣解

    对于方案i和l，若$a_{ij} \geq a_{lj}$，且其中至少有一个取绝对大于号，则方案i优于方案l，方案l应予以删除。
  - (2)满意值法

    又称**逻辑乘法**。对每个属性规定一个最低的阈值，当某一方案中只要有一个属性值低于规定阈值，该方案即不予采用。
  - (3)逻辑和法

    与上述逻辑乘法相反，即当某一方案中只要有一个属性值高于规定阈值，该方案即予以保留。

多属性决策问题的求解

- 方案的选取
  - 即对方案优劣按照一定方法进行排序。
  - 多属性决策中常用的方法有
    - 加权和法
    - 加权积法
    - TOPSIS法 (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution，逼近理想解的排序法)
    - ELECTRE法 (Elimination and Choice Translating Reality，消去与选择转换法) ……
  - 下面举例说明加权和法和TOPSIS法。

多属性决策问题的求解

- 例7 某人准备购买一辆小汽车，经多方考察咨询，初步选定了A, B, C, D四种型号。下表中列出了决策时的属性依据和有关数据。要求分别应用加权和法和TOPSIS法帮助该人决策选择汽车型号。

方案	属性			
	价格（万元）	百公里油耗（L）	使用寿命（万km）	舒适度
A	12	10	20	3（稍差）
B	20	12	35	7（很好）
C	18	12	30	6（好）
D	15	11	24	4（中等）

多属性决策问题的求解

- (例7) 解：
  - (1) 先进行**数据的预处理**。下面的两个表格分别给出了经线性变换和标准0-1变换后得到的数值：

方案	属性			
	价格（万元）	百公里油耗（L）	使用寿命（万km）	舒适度
A	0.4000	0.1666	0.5714	0.4286
B	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000
C	0.1000	0.0000	0.8571	0.8571
D	0.2500	0.0833	0.6857	0.5714

方案	属性			
	价格（万元）	百公里油耗（L）	使用寿命（万km）	舒适度
A	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
B	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000
C	0.2500	0.0000	0.6666	0.7500
D	0.6250	0.5000	0.2666	0.2500

多属性决策问题的求解

- (例7) 解：
  - (2) 用加权和法**求解**。
    - **加权和法的原理：**对经处理后的数据，分别对属性j乘上一个权数ω_j，然后对方案i计算各属性的加权和$C_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_j x_{ij}$，按加权和值的大小对方案排序。
    - 设本例中四个属性（价格、百公里油耗、使用寿命、舒适度）的权值（比如，可通过**层次分析法**求得）分别为0.3，0.25，0.25，0.2，则按**线性变换**后的数据计算各方案的加权和值分别为：

$$C_A=0.3\times 0.4000+0.25\times 0.1666+0.25\times 0.5714+0.2\times 0.4286$$
$$=0.3903$$
$$C_B=0.4500$$
$$C_C=0.6857$$
$$C_D=0.3815$$

由此各方案的排序为：

$$C\succ B\succ A\succ D$$

多属性决策问题的求解

- (例7) 解：
  - (3) 用TOPSIS法**求解**。
    - **TOPSIS法的原理**：TOPSIS，即technique for order preference by similarity to ideal solution (逼近理想解的排序法)。若把各方案属性值当作是n维空间中的一个点，则决策矩阵中每个属性的最优值组成理想点，决策矩阵中每个属性的最差值组成负理想点。按TOPSIS法决策就是希望要选择的方案离理想点尽可能近，而离负理想点尽可能远。
    - **TOPSIS法的计算**：

方案点离理想点和负理想点的欧氏距离d_i^*, d_i°的计算公式分别为

$$d_i^* = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - x_j^*\right)^2\right)^{1/2}$$

$$d_i^\circ = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - x_j^\circ\right)^2\right)^{1/2}$$

其中 $x_j^* = \max_i\{x_{ij}\}, x_j^\circ = \min_i\{x_{ij}\}.$

然后计算每个方案i的值C_i，并按大小排序：

$$C_i = \frac{d_i^\circ}{d_i^\circ + d_i^*}$$

多属性决策问题的求解

方案	属性			
	价格（万元）	百公里油耗（L）	使用寿命（万km）	舒适度
A	0.4000	0.1666	0.5714	0.4286
B	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000
C	0.1000	0.0000	0.8571	0.8571
D	0.2500	0.0833	0.6857	0.5714

- (例7) 解：
  - (3) 用TOPSIS法求解。
    - 本例中，按线性变换后的数据得到：

理想点为 $(0.4000, 0.1666, 1.0000, 1.0000)$

负理想点为 $(0.0000, 0.0000, 0.0571, 0.4286)$

计算得到各方案的 d_i^*, d_i° 见下表：

方案i	A	B	C	D
d_i^*	0.7143	0.4333	0.3982	0.5585
d_i°	0.4333	0.7143	0.5246	0.3208

计算得到各方案的C_i见下表：

方案i	A	B	C	D
C_i	0.3776	0.6224	0.5685	0.3648

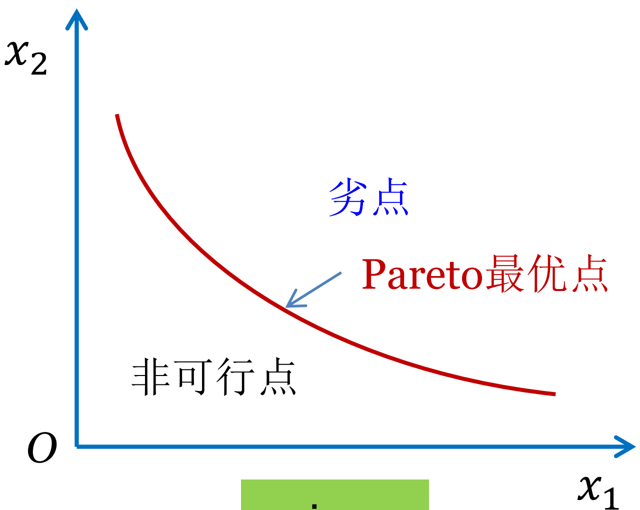
由此各方案的排序为：$B \succ C \succ A \succ D$

多目标决策问题的求解

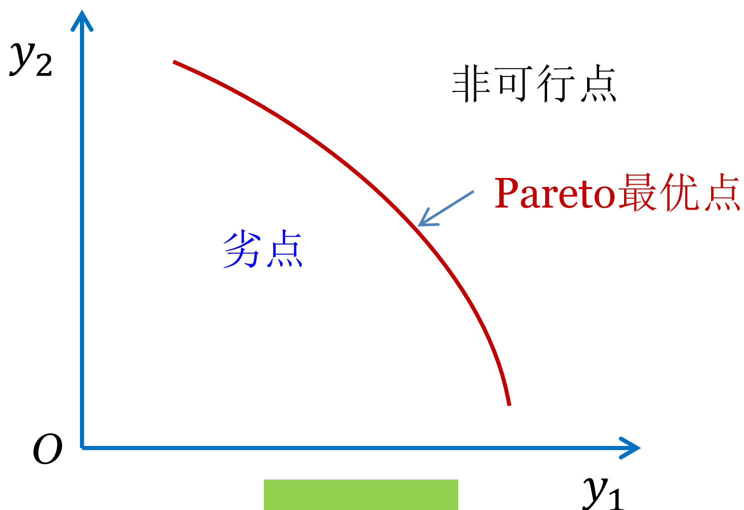
- 帕累托(Pareto)最优
  - 帕累托最优(Pareto optimum)，源于西方福利经济学，它可表述为：当一个国家的资源和产品是以这样一种方式配置时—即没有一种重新配置能够在不使一个其他人生活恶化的情况下改善任何人的生活。
  - 将帕累托最优的概念应用于多目标决策，称某个解A为Pareto最优时，是指不存在其他可行解，该解在所有目标上同A一样好，且至少在一个目标上绝对优于A。
- 帕累托前沿(Pareto frontier)
  - Pareto最优解的目标函数值(多个目标值，构成一个向量)在目标函数空间中称为非劣点或有效点；所有Pareto最优解对应的有效点构成一个帕累托前沿面(Pareto frontier)，又称为有效前沿。
- 多目标决策问题的求解
  - 求解多目标决策问题的思路不同，可以有多种求解多目标决策问题的方法（参见《运筹学（清华大学出版社，第四版）》第17章）。

帕累托(Pareto)最优

- 权衡曲线(trade-off curve)
  - 在二维情况下，目标空间中的帕累托前沿(即有效前沿)是一条曲线，称为权衡曲线，如下图中的(a)、(b)所示：



(a) $\min x_1$ $\min x_2$



(b) $\max y_1$ $\max y_2$

当产出量一定时，投入x_1和x_2越小越好

当投入量一定时，产出y_1和y_2越大越好

帕累托(Pareto)最优

- 例8 神龙公司用原料1和原料2生产A、B两种产品，但在获取利润的同时也给环境带来污染，有关数据见下表，试求问题的Pareto最优解并进行分析。

单件消耗		产品 A	产品 B	可用量
原料	1	1	2	40
原料	2	6	3	150
利润（元）		2	3	
污染物（单位）		3	4	

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

帕累托(Pareto)最优

- (例8)解：
  - 设分别x_1,x_2表示A、B两种产品的产量，z_1表示利润，z_2表示产生的污染物数量，则该问题可表示为如下规划问题模型：

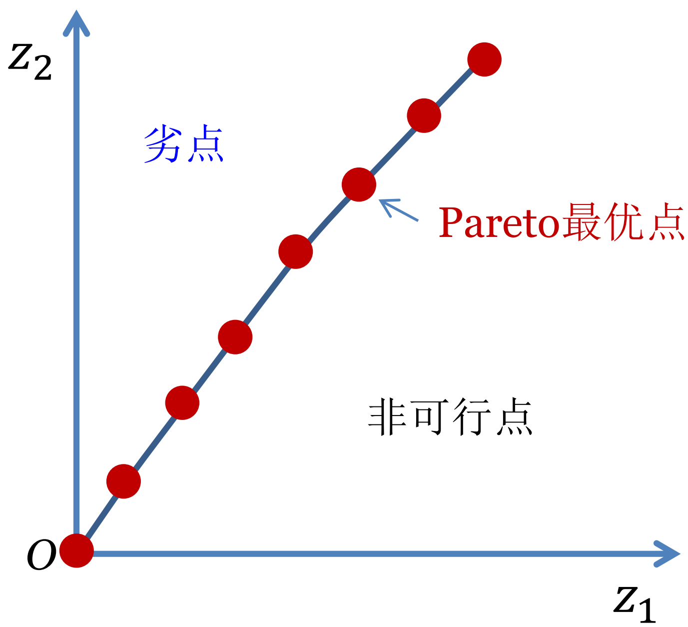
$$\max z_1 = 2x_1 + 3x_2$$
$$\min z_2 = 3x_1 + 4x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 40 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

  - 这是一个有两个目标的多目标决策问题。
    - 当只对第一个目标求解时有$z_1^* = 70$，此时$z_2 = 100$；
    - 逐步减小z_1的值（**作为新增的约束条件**），得到相应z_2的值（**求z_2的最优值**）。
  - 按上述步骤得到的部分解见下页的表格。将这些解对应的目标函数值构成的点在目标空间中标示出来，所得的折线为**（近似的）权衡曲线**。
    - 曲线上的点为Pareto最优解对应的（目标空间中的）非劣点；
    - 曲线左上方的点为劣解对应的（目标空间中的）劣点；
    - 曲线右下方的点为非可行解对应的（目标空间中的）非可行点。

帕累托(Pareto)最优

- (例8)解：

x_1	20	22.5	25	20	15	10	5	0
x_2	10	5	0	0	0	0	0	0
z_1	70	60	50	40	30	20	10	0
z_2	100	87.5	75	60	45	30	15	0



层次分析法

- 方法概述
  - 层次分析法(Analytical Hierarchy Process, AHP法)是由美国运筹学家Thomas Saaty于20世纪70年代提出的，是一种定性与定量分析相结合的多目标决策分析方法。
  - AHP法特别适用于分析解决一些结构比较复杂、难于量化的多目标决策问题中各目标（因素）的权重确定和方案排序等，目前得到较多应用。
  - 下面通过实例介绍该方法的原理。

层次分析法

- 例9 张老师需要购买一套住房，他考虑的主要因素有：价格适中，上下班比较方便，小区对应的中小学较好，居住环境相对较好。经房地产中介商介绍，他初步选择了甲、乙、丙三套住房，情况如下表所示：

	甲	乙	丙
价格(万元)	35	28	22
上下班	不太方便	较方便	方便
对应的中小学	名校	较好	一般
居住环境	较好	好	稍差

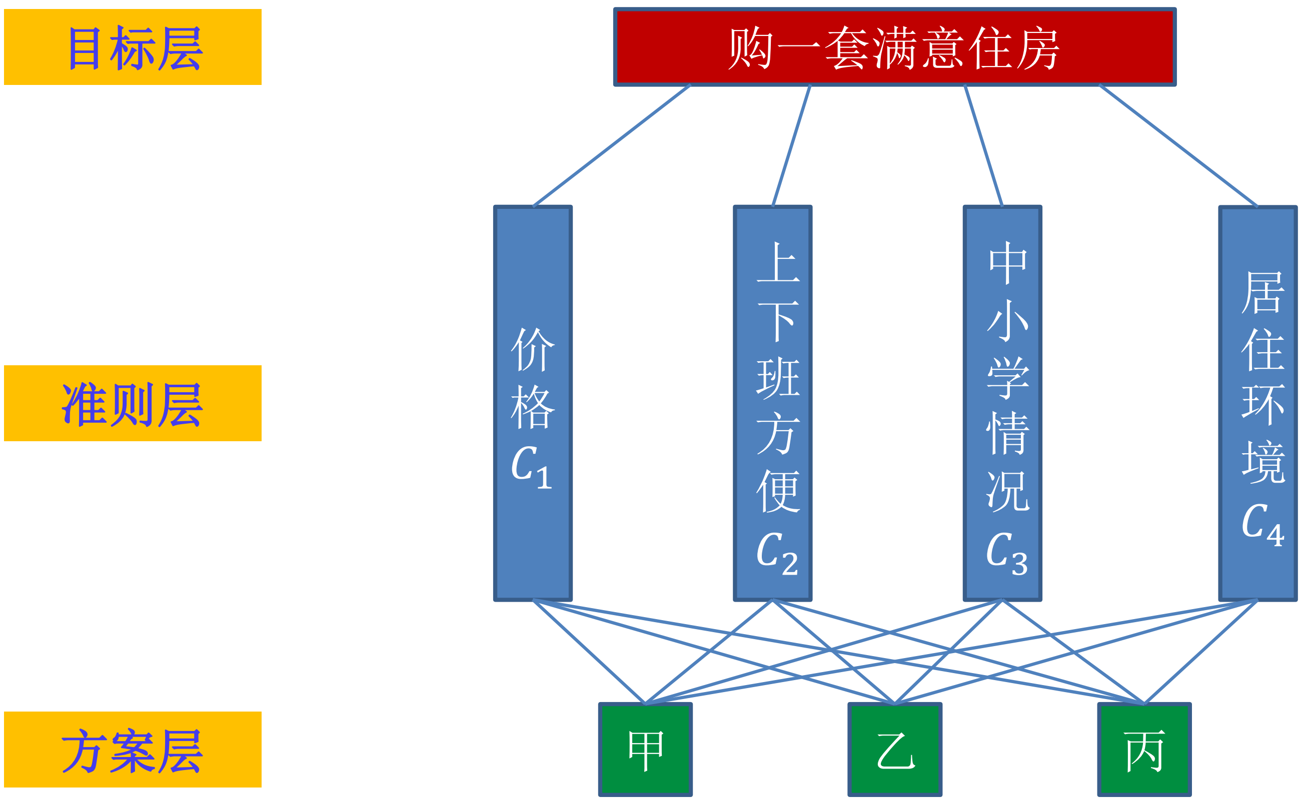
试用AHP法帮助张老师选择一套尽可能满意的住房。

层次分析法

- (例9)解： 用AHP法求解问题的步骤为：
  - 第一步：构建层次分析模型。
    - 首先对问题所涉及的因素进行分类，然后构造一个各因素之间相互联结的层次结构模型，即**层次分析模型**。
    - 因素分类：
      - **目标类**：如购得一套满意住房。
      - **准则类**：衡量目标能否实现的标准，如住房的价格是否适中。
      - **方案类**：指实现目标的方案、方法、手段等，如A、B、C三套可选住房。
    - 层次结构：按照目标到方案的自上而下地将各因素之间的直接影响关系排列于不同层次，并构成一个层次结构图。因此该图的顶层为**目标层**，中间层为**准则层**（根据问题的复杂程度，每项准则还可分为若干子准则），最下层为**方案层**。
    - 本例的层次分析模型见下页的图。

层次分析法

- (例9)解（续）： 本例的层次分析模型



层次分析法

- (例9)解（续）：
  - 第二步：确定本层次各因素相对于上一层次因素的权重。
    - 将本层次的因素A_i和$A_j(i,j=1,2,\ldots,n)$相对于上一层次因素$C_k\ (k=1,2,\ldots,m)$按重要性程度进行两两比较，得到判断矩阵$(a_{ij})_{n\times n}$。
    - Saaty 给出了因素两两比较时确定a_{ij}值的**9级标度**，见下表：

标度a_{ij}	定义
1	因素i与因素j同样重要
3	因素i比因素j略微重要
5	因素i比因素j明显(较)重要
7	因素i比因素j非常重要
9	因素i比因素j绝对重要
2, 4, 6, 8	为以上两判断之间的中间状态对应的标度值
倒数	若因素j与因素i比较，得到判断值为$a_{ji}=1/a_{ij}$, $a_{ii}=1$

层次分析法

- (例9)解（续）：
  - 第二步：确定本层次各因素相对于上一层次因素的权重。
    - 本例中，将甲、乙、丙住房相对价格因素C_1比较时，得到的标度值见下表：

C_1	甲	乙	丙
甲	1	1/3	1/4
乙	3	1	1/2
丙	4	2	1
合计	8	10/3	7/4

可记判断矩阵

$$C_1=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ 3 & 1 & \frac{1}{2}\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

层次分析法

- (例9)解（续）：
  - 第三步：求判断矩阵的（最大特征值对应的）特征向量 $W = (\omega_1, \ldots, \omega_n)^T$，该向量标志因素$A_1, \ldots, A_n$相对于上层因素$C_k$的重要性程度的排序。
    - 一般地，在AHP法中计算判断矩阵的最大特征值与特征向量不需要很高的精度，故用近似法计算即可。
    - 下面介绍两种方法：
      - **求和法**：先对判断矩阵的每列求和得到$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$，令$b_{ij} = a_{ij}/\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$，并计算得到$\omega_i = (\sum_{j=1}^{n} b_{ij})/n$。
      - **方根法**：先计算$\bar{\omega}_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}$，再进行归一化处理得到

$$\omega_i = \frac{\bar{\omega}_i}{\sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_i},\quad W = (\omega_1, \ldots, \omega_n)^T$$

层次分析法

- (例9)解（续）：
  - 第三步：求判断矩阵的（最大特征值对应的）特征向量 $W=(\omega_1,\dots,\omega_n)^T$，该向量标志因素$A_1,\dots,A_n$相对于上层因素$C_k$的重要性程度的排序。
    - 本例中，应用**求和法**计算判断矩阵C_1的b_{ij}和ω_i，见下表：

C_1的b_{ij}	甲	乙	丙	ω_i
甲	1/8	1/10	1/7	0.123
乙	3/8	3/10	2/7	0.320
丙	4/8	6/10	4/7	0.557

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

层次分析法

- (例9)解（续）：
  - 第四步：计算最大特征值λ_{max}，对判断矩阵进行一致性检验。
    - 为确定上述计算得到的ω_i能否作为下层因素相对于上层某一因素排序的依据，需要**对判断矩阵中的a_{ij}值之间是否具有一致性进行检验**：即对$\forall i,j=1,2,\dots,n$，有$a_{ij}=a_{ik}/a_{kj}(k=1,2,\dots,n)$。
    - 一致性检验的原理：
      - 设ω_i表示因素i的重要程度，当判断矩阵具有完全一致性时，有$a_{ij}=\omega_i/\omega_j$，因而判断矩阵可写为

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} \omega_1/\omega_1 & \omega_1/\omega_2 & \dots & \omega_1/\omega_n \\ \omega_2/\omega_1 & \omega_2/\omega_2 & \dots & \omega_2/\omega_n \\ & \vdots & & \\ \omega_n/\omega_1 & \omega_n/\omega_2 & \dots & \omega_n/\omega_n \end{bmatrix}$$

因此有 $AW=nW$，故n为A的特征值（为该矩阵唯一非零的最大特征值）：

- 当判矩阵完全一致时，有 $\lambda_{max}=n$；
- 当判断矩阵在一致性上存在误差时，一般有 $\lambda_{max}>n$；且误差越大，$\lambda_{max}-n$的值就越大。其中取 $\lambda_{max}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(AW)_i}{\omega_i}$

层次分析法

- (例9)解（续）：
  - 第四步：计算最大特征值λ_{max}，对判断矩阵进行一致性检验。
    - AHP法中用CI (Consistency Index) 作为检验判断矩阵一致性的指标：

$$\mathrm{CI}=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$$

当$\lambda_{max}=n$时，CI=0，为完全一致；CI值越大，判断矩阵的完全一致性就越差。

    - 由于判断矩阵的阶数越大时，一致性就越差，因此引进修正系数 RI（Random Index），并最终用一致性比例CR值(Consistency Ratio)作为检验判断矩阵是否具有一致性的标准：

$$\mathrm{CR}=\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{RI}}$$

    - 当计算得到 $\mathrm{CR}<0.1$，则认为判断矩阵具有一致性。

矩阵阶数n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
RI值	0.52	0.89	1.13	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52	1.54

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

层次分析法

- (例9)解（续）：
  - 第四步：计算最大特征值λ_{max}，对判断矩阵进行一致性检验。
    - 本例中，有：

$$AW=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ 3 & 1 & \frac{1}{2}\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.123\\ 0.320\\ 0.557\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.369\\ 0.978\\ 1.689\end{bmatrix}$$

$$\lambda_{max}=\frac{1}{3}\left(\frac{0.369}{0.123}+\frac{0.978}{0.320}+\frac{1.689}{0.557}\right)=3.029$$

$$\mathrm{CI}=\frac{3.029-3}{3-1}=0.0145$$

$$\mathrm{CR}=\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{RI}}=\frac{0.0145}{0.52}=0.028<0.1$$

故判断矩阵C_1通过一致性检验，得到的权重向量$W=(0.123,0.320,0.557)^T$可以作为甲、乙、丙三处住房相对于价格因素的重要性比较。

层次分析法

- (例9)解（续）：
  - 第四步：计算最大特征值λ_{max}，对判断矩阵进行一致性检验。
    - 本例中，甲、乙、丙三处住房相对于其他三个因素的判断矩阵为：

$$C_2=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{8}\\ 5 & 1 & \frac{1}{5}\\ 8 & 5 & 1\end{bmatrix}, C_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & 8\\ \frac{1}{2} & 1 & 6\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & 1\end{bmatrix}, C_4=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & 5\\ 3 & 1 & 7\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 1\end{bmatrix}$$

计算得到三处住房相对于各准则的权重见下表：

	价格	上下班方便	中小学情况	居住环境
甲	0.123	0.062	0.593	0.283
乙	0.320	0.212	0.341	0.643
丙	0.557	0.726	0.066	0.074

以上判断矩阵均通过了一致性检验。

Haiyan Lu 6/3/2020
Jiangnan University

层次分析法

- (例9)解（续）：
  - 第四步：计算最大特征值λ_{max}，对判断矩阵进行一致性检验。
    - 本例中，四个准则相对于目标的判断矩阵以及计算出的权重向量为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0.444 \\ 0.111 \\ 0.222 \\ 0.222 \end{bmatrix},$$

  - 第五步：综合计算结果，把对方案排序优选。
    - 甲、乙、丙三处住房相对于购买一套满意住房的总目标的得分为：

$$\begin{bmatrix} S_{甲} \\ S_{乙} \\ S_{丙} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.123 & 0.062 & 0.593 & 0.283 \\ 0.320 & 0.212 & 0.341 & 0.643 \\ 0557 & 0。726 & 0.066 & 0.074 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.444 \\ 0.111 \\ 0.222 \\ 0.222 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.256 \\ 0.385 \\ 0.359 \end{bmatrix}$$

按排序结果，对张老师来讲住房乙是**满意度最高**的。

Thank you!

谢 谢！