
# 运筹与优化
# Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

# 线性规划与单纯形法

第一章

# 单纯形法的计算步骤

第5节

# 单纯形法的计算步骤（$\max z$）

- 第一步：求出初始基可行解，列出初始单纯形表；
- 第二步：进行最优性检验；
- 第三步：从一个基可行解转换（迭代）到另一个目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表；
- 第四步：重复第二、三步，直到计算终止。

# 单纯形法的计算步骤（max z）

- 第一步：求出初始基可行解，列出初始单纯形表。

首先将非标准形式线性规划问题化为标准形式。

由于总可以设法使约束方程系数矩阵包含一个单位矩阵，不妨设为$(P_1,\cdots,P_m)$，以此作为初始可行基。

将线性规划标准形式的约束条件与目标函数组成$n+1$个变量、$m+1$个方程的方程组：

$$\left\{\begin{array}{lcccccccl}
x_1 & + \cdots & +a_{1j}x_j & + \cdots & +a_{1k}x_k & + \cdots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
\quad\ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\qquad x_l & + \cdots & +a_{lj}x_j & + \cdots & +a_{lk}x_k & + \cdots & +a_{l,n}x_n & = & b_l \\
\qquad\quad\ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\qquad\qquad x_m & + \cdots & +a_{mj}x_j & + \cdots & +a_{mk}x_k & + \cdots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \\
-z+c_1x_1\cdots+c_lx_l\cdots+c_mx_m & + \cdots & +c_jx_j & + \cdots & +c_kx_k & + \cdots & +c_nx_n & = & 0
\end{array}\right.$$

# 单纯形法的计算步骤（max z）

- 第一步：求出初始基可行解，列出初始单纯形表。

对应上述方程组的**增广矩阵**为：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
-z & x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & \cdots & x_j & \cdots & x_k & \cdots & x_n & b
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccc|c}
0 & 1 & & & & & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
\vdots & & \ddots & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & & & 1 & & & \cdots & a_{lj} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{l,n} & b_l \\
\vdots & & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & & & & & 1 & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{m,n} & b_m \\
1 & c_1 & \cdots & c_l & \cdots & c_m & \cdots & c_j & \cdots & c_k & \cdots & c_n & 0
\end{array}\right]
$$

# 单纯形法的计算步骤（max z）

- 第一步：求出初始基可行解，列出初始单纯形表。

对方程组的增广矩阵做初等行变换，把最后一行中基变量对应的系数化为零，得到：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
-z & x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & \cdots & x_j & \cdots & x_k & \cdots & x_n & b
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccc|c}
0 & 1 & & & & & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
\vdots & & \ddots & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & & & 1 & & & \cdots & a_{lj} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{l,n} & b_l \\
\vdots & & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & & & & & 1 & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{m,n} & b_m \\
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_j-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} & \cdots & c_k-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} & \cdots & c_n-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{in} & \boxed{-\sum_{i=1}^{m} c_i b_i}
\end{array}\right]
$$

当前基可行解所对应的目标函数值的相反数

# 单纯形法的计算步骤（$\max z$）

- 第一步：求出初始基可行解，列出初始单纯形表。

基于上述结果，列出初始单纯形表：

| $c_j \rightarrow$ | | | $c_1$ | $\cdots$ | $c_l$ | $\cdots$ | $c_m$ | $\cdots$ | $c_j$ | $\cdots$ | $c_k$ | $\cdots$ | $c_n$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $\cdots$ | $x_l$ | $\cdots$ | $x_m$ | $\cdots$ | $x_j$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ | $x_n$ | |
| $c_1$ | $x_1$ | $b_1$ | 1 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $a_{1j}$ | $\cdots$ | $a_{1k}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $\theta_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $c_l$ | $x_l$ | $b_l$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $a_{lj}$ | $\cdots$ | $a_{lk}$ | $\cdots$ | $a_{ln}$ | $\theta_l$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $c_m$ | $x_m$ | $b_m$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $a_{mj}$ | $\cdots$ | $a_{mk}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | $\theta_m$ |
| $c_j - z_j$ | | $-z_0$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$ | $\cdots$ | $c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik}$ | $\cdots$ | $c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}$ | |

# 单纯形法的计算步骤（ max z ）

- 第二步：进行最优性检验。
  - 若当前单纯形表中**所有**检验数$\sigma_j \le 0$，**且**基变量中不含有（非零）人工变量，则表中的基可行解即为**最优解**，计算结束。对基变量中含有（非零）人工变量时解的最优性检验将在下一节讨论。
  - 若当前单纯形表中**存在**检验数$\sigma_j > 0$，**且**其对应$x_j$的系数列向量 $P_j \le 0$ ，则此问题为**无界解**，计算结束；否则，转入下一步。

# 单纯形法的计算步骤（ max z ）

- 第三步：从一个基可行解转换（迭代）到另一个目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表。

（1）确定入基变量。一般可根据$\sigma_k = \max_j\{\sigma_j | \sigma_j > 0\}$，确定$x_k$为入基变量。

（2）确定出基变量。根据**$\theta$规则（最小比值规则）**：

$\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$，确定$x_l$为出基变量，$a_{lk}$为主元素。

（3）以$a_{lk}$为主元素进行**迭代运算**（亦称为**旋转运算**）。即用高斯消元法（**初等行变换**）把$x_k$对应的列向量

$$P_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{变换为}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{第}l\text{行}$$

得到新的单纯形表。

注意在经过迭代过程中，上述计算中用到的各元素均为新表中相应位置处的元素。

# 单纯形法的计算步骤（max z）

- 第三步：从一个基可行解转换（迭代）到另一个目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表。

| $c_j \rightarrow$ | | | $c_1$ | $\cdots$ | $c_l$ | $\cdots$ | $c_m$ | $\cdots$ | $c_j$ | $\cdots$ | $c_k$ | $\cdots$ | $c_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $\cdots$ | $x_l$ | $\cdots$ | $x_m$ | $\cdots$ | $x_j$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ | $x_n$ |
| $c_1$ | $x_1$ | $b_1 - b_l\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$ | 1 | $\cdots$ | $-\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $a_{1j} - a_{1k}\frac{a_{lj}}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $a_{1n} - a_{1k}\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $c_k$ | $x_k$ | $\frac{b_l}{a_{lk}}$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{a_{lj}}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $c_m$ | $x_m$ | $b_m - b_l\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$ | 0 | $\cdots$ | $-\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $a_{mj} - a_{mk}\frac{a_{lj}}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $a_{mn} - a_{mk}\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$ |
| $c_j - z_j$ | | | 0 | $\cdots$ | $\boxed{-\frac{c_k - z_k}{a_{lk}}}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $(c_j - z_j) - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}(c_k - z_k)$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $(c_n - z_n) - \frac{a_{ln}}{a_{lk}}(c_k - z_k)$ |

- 第四步：重复第二、三步，直到计算结束。

| $c_j \rightarrow$ | | | $c_1$ | $\cdots$ | $c_l$ | $\cdots$ | $c_m$ | $\cdots$ | $c_j$ | $\cdots$ | $c_k$ | $\cdots$ | $c_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $\cdots$ | $x_l$ | $\cdots$ | $x_m$ | $\cdots$ | $x_j$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ | $x_n$ |
| $c_1$ | $x_1$ | $b_1$ | 1 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $a_{1j}$ | $\cdots$ | $a_{1k}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $c_l$ | $x_l$ | $b_l$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $a_{lj}$ | $\cdots$ | $a_{lk}$ | $\cdots$ | $a_{ln}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $c_m$ | $x_m$ | $b_m$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $a_{mj}$ | $\cdots$ | $a_{mk}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ |
| $c_j - z_j$ | | | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$ | $\cdots$ | $c_k - \sum_{i=1}^m c_i a_{ik}$ | $\cdots$ | $c_n - \sum_{i=1}^m c_i a_{in}$ |

迭代

| $c_j \rightarrow$ | | | $c_1$ | $\cdots$ | $c_l$ | $\cdots$ | $c_m$ | $\cdots$ | $c_j$ | $\cdots$ | $c_k$ | $\cdots$ | $c_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $\cdots$ | $x_l$ | $\cdots$ | $x_m$ | $\cdots$ | $x_j$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ | $x_n$ |
| $c_1$ | $x_1$ | $b_1 - b_l\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$ | 1 | $\cdots$ | $-\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $a_{1j} - a_{1k}\frac{a_{lj}}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $a_{1n} - a_{1k}\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $c_k$ | $x_k$ | $\frac{b_l}{a_{lk}}$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{a_{lj}}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $c_m$ | $x_m$ | $b_m - b_l\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$ | 0 | $\cdots$ | $-\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $a_{mj} - a_{mk}\frac{a_{lj}}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $a_{mn} - a_{mk}\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$ |
| $c_j - z_j$ | | | 0 | $\cdots$ | $-\frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $(c_j - z_j) - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}(c_k - z_k)$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $(c_n - z_n) - \frac{a_{ln}}{a_{lk}}(c_k - z_k)$ |

# 实例

- 例5 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad \le 16 \\ \qquad\quad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

# 实 例

- 解: 该线性规划问题的标准形式为

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

一个初始可行基 $B = (P_3, P_4, P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

得到初始基本可行解 $X^{(0)} = (0,0,8,16,12)^T$

# 实 例

| $c_j \to$ | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $X_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\theta_i$ |
| 0 | $x_3$ | 8 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 0 | $x_4$ | 16 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | — |
| 0 | $x_5$ | 12 | 0 | 4 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| $c_j - z_j$ | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |

初始单纯形表

非基变量的检验数为

$$\sigma_1 = c_1 - z_1 = 2 - (0,0,0)\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = 2, \qquad \sigma_2 = c_2 - z_2 = 3 - (0,0,0)\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} = 3$$

检验数都大于零,且$P_1, P_2$有正分量存在,按$\max\{\sigma_1, \sigma_2\} = \max\{2,3\} = 3$,确定$x_2$为换入变量

按$\theta$规则:$\theta = \min\limits_i \left\{ \dfrac{b_i}{a_{i2}} \middle| a_{i2} > 0 \right\} = \min\left\{ 8/2, -, 12/4 \right\} = 3$,确定第3行对应的基变量$x_5$为换出变量

以$x_2$所在列$x_5$所在行的交叉处的元素[4]为主元素进行旋转迭代,得下一单纯形表

# 实 例

经过一次迭代得到的单纯形表：

| $c_j \rightarrow$ | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $X_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\theta_i$ |
| 0 | $x_3$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | $-1/2$ | 2 |
| 0 | $x_4$ | 16 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 3 | $x_2$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | $1/4$ | – |
| $c_j - z_j$ | | | 2 | 0 | 0 | 0 | $-3/4$ | |

得到新的基可行解$X^{(1)} = (0,3,2,16,0)^T$,目标函数值$z = 9$

$\sigma_1 = c_1 - z_1 = 2 - (0,0,3)\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = 2 > 0$,且$P_1$有正分量存在，因此确定$x_1$为换入变量，

同时按$\theta$规则确定$x_3$为换出变量，进行旋转迭代，得下一单纯形表

# 实 例

经过两次迭代得到的单纯形表：

| $c_j \to$ | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $X_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\theta_i$ |
| 2 | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | $-1/2$ | $-$ |
| 0 | $x_4$ | 8 | 0 | 0 | $-4$ | 1 | 2 | 4 |
| 3 | $x_2$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | $1/4$ | 12 |
| $c_j - z_j$ | | | 0 | 0 | $-2$ | 0 | $1/4$ | |

得到新的基可行解$X^{(2)}=(2,3,0,8,0)^T$,目标函数值$z=13$

$\sigma_5 = c_5 - z_5 = 0-(2,0,3)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = 1/4 > 0$,且$P_5$有正分量存在，因此确定$x_5$为换入变量，

同时按$\theta$规则确定$x_4$为换出变量，进行旋转迭代，得下一单纯形表

# 实 例

经过三次迭代得到的单纯形表：

| $c_j \to$ | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $X_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\theta_i$ |
| 2 | $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | |
| 0 | $x_5$ | 4 | 0 | 0 | −2 | 1/2 | 1 | |
| 3 | $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 1/2 | −1/8 | 0 | |
| $c_j - z_j$ | | | 0 | 0 | −3/2 | −1/8 | 0 | |

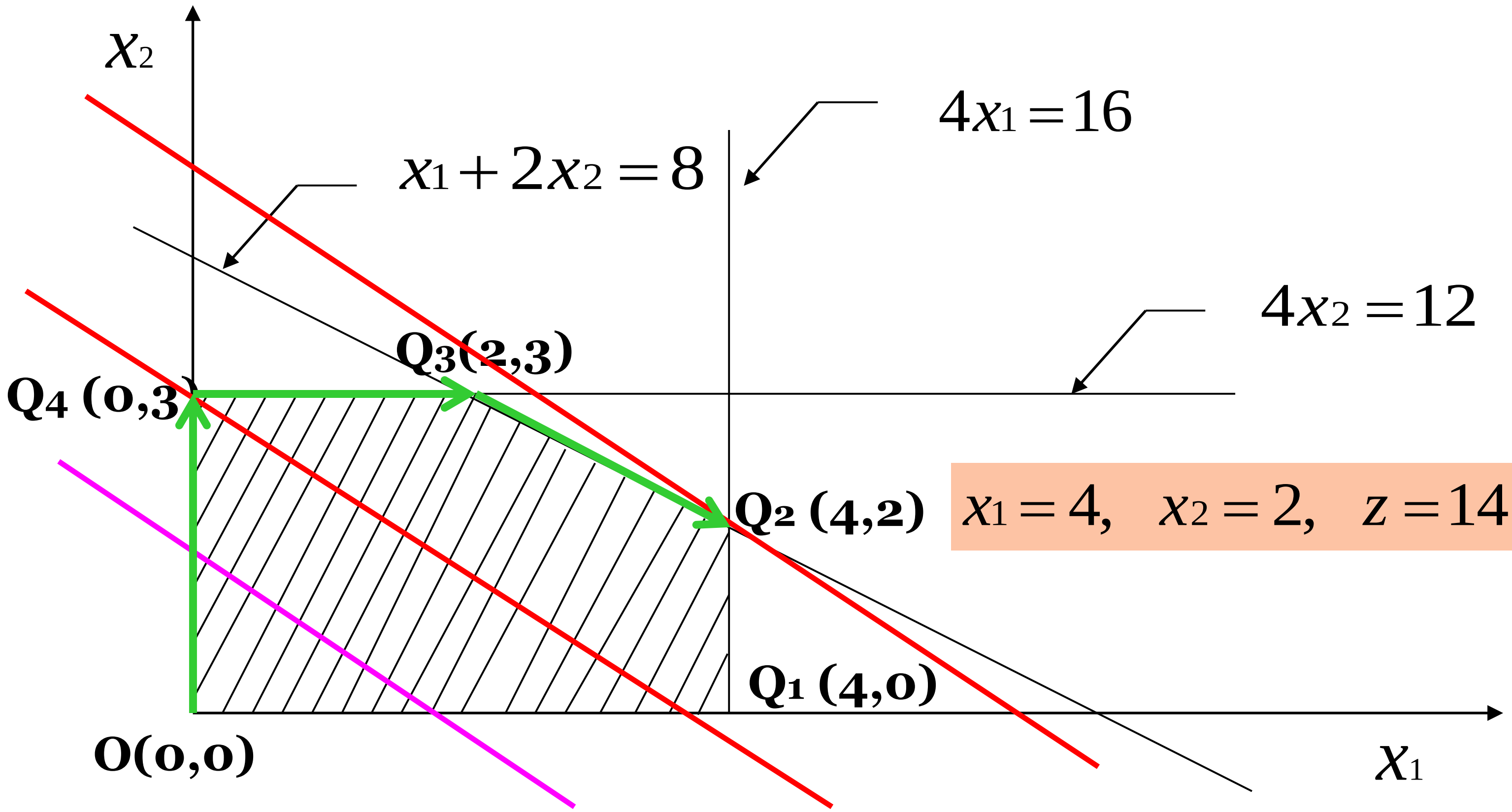
最后一行的检验数都已为负或零，停止计算，得到最优解

$X^* = X^{(3)} = (4,2,0,0,4)^T$,

最优目标函数值$z^* = 14$

# 实 例

- 用图解法求解**例5**，如下。
- 上述单纯形法中各基可行解对应图解法可行域的什么顶点？



# 实 例

- 例6 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \qquad\qquad \le 16 \\ \qquad\qquad 5x_2 \le 15 \\ x_1, \qquad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

之前已用图解法进行求解。

# 实 例

- 解：

将该线性规划问题化为标准形式

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 5x_2 + x_5 = 15 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

# 实 例

- 解：

单纯形法求解，依次得下列初始单纯形表：

| $C_j \rightarrow$ | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $X_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\theta$ |
| 0 | $x_3$ | 12 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 0 | $x_4$ | 16 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | - |
| 0 | $x_5$ | 15 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| $\sigma_j$ | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
| $C_B$ | $X_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\theta$ |
| 0 | $x_3$ | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | $-2/5$ | 3 |
| 0 | $x_4$ | 16 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 3 | $x_2$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | $1/5$ | - |
| $\sigma_j$ | | | 2 | 0 | 0 | 0 | $-3/5$ | |

# 实例

- 解：

| $C_B$ | $X_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $x_1$ | 3 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | $-1/5$ | |
| 0 | $x_4$ | 4 | 0 | 0 | $-2$ | 1 | $4/5$ | |
| 3 | $x_2$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | $1/5$ | |
| $\sigma_j$ | | | 0 | 0 | $-1$ | 0 | $-1/5$ | |

上面单纯形表中所有检验数均$\sigma_j \leq 0$，表明已找到最优解。

该表中的基可行解为最优解：$X^* = (3,3,0,4,0)^T$。该解为线性规划问题的唯一最优解。

代入目标函数得最优值：$Z^* = 15$。

# 谢 谢！

Thank you!