运筹与优化
Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

线性规划与单纯形法

第一章

单纯形法的进一步讨论

第6节

人工变量法

- 若线性规划问题的约束条件为等式，而系数矩阵又不包含单位矩阵时，可以通过添加人工变量的方法来人为构造一个单位矩阵，从而得到一个含人工变量的初始基。
- 若线性规划问题的约束条件为“≥”型不等式，可以现在不等式左端减去一个非负的剩余变量（也可称为松弛变量），然后再添加一个人工变量，人为构造一个单位矩阵，从而得到一个含人工变量的初始基。

人工变量法

- 在原问题的最优解中，人工变量取值必须为零，为求得原问题的解，因此需要经过基的变换，将人工变量从基变量中逐个替换出来。
- 可用大M法或两阶段法求解含有人工变量的线性规划问题。
- 经单纯形法的迭代运算后，若最终的基变量中不再含有非零的人工变量，则原问题**有解**；否则，原问题**无可行解**。

可进一步计算判别为唯一最优解、无穷多最优解还是无界解。

人工变量法—大M法

- 设线性规划问题的约束条件为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1,\cdots,m$$

给每一个等式约束左端加入人工变量$x_{n+1},\dots,x_{n+m}$，得到

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1,\cdots,x_n \ge 0, \quad x_{n+1},\cdots,x_{n+m} \ge 0 \end{cases}$$

以$x_{n+1},\dots,x_{n+m}$为基变量，可得到一个m阶单位矩阵。

人工变量法—大M法

- 大M法的基本思想
  - 在一个线性规划问题的约束条件中加进人工变量后，若目标函数是求**最大化**，为使加入的人工变量对原问题目标函数的优化不产生影响，因此假定人工变量在目标函数中的系数为绝对值任意大的负值，用“$-M$”（M 为任意大的正数)表示，称为“惩罚因子”，即只要人工变量取值大于零，目标函数就不可能实现最大化。因此，在迭代过程中，目标函数要实现最大化，就必须把人工变量从基变量中换出。
- **思考**：对于目标函数为**最小化**的线性规划问题，用大M法求解时，人工变量在目标函数中的应如何取值？
  - 此时，**人工变量**在目标函数中的系数应为“$+M$”。

人工变量法—大M法

- **例7** 用单纯形法（**大M法**）求解线性规划问题

$$\max Z = -3x_1 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

人工变量法—大M法

- **解：**

先将线性规划问题化为标准形式，并添加人工变量得到如下形式的线性规划模型

$$\max Z' = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_j \ge 0 (j = 1,..,7) \end{cases}$$

人工变量法—大M法

- **解：**

列出初始单纯形表

C_B	X_B	c_j	-3	0	1	0	0	$-M$	$-M$	θ
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0	4
$-M$	x_6	1	-2	1	-1	0	-1	1	0	1
$-M$	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1	3
c_j-z_j			-2M-3	4M	1	0	-M	0	0	

人工变量法—大M法

- **解：**

进行迭代可得

C_B	X_B	c_j / b	-3	0	1	0	0	-M	-M	θ
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	3	3	0	2	1	1	-1	0	1
0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0	-
-M	x_7	6	6	0	4	0	3	-3	1	1
c_j-z_j			6M-3	0	4M+1	0	3M	-4M	0	
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2	-
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3	9
-3	x_1	1	1	0	2/3	0	1/2	-1/2	1/6	3/2
c_j-z_j			0	0	3	0	3/2	-M-3/2	-M+1/2	

人工变量法—大M法

- **解：**

继续迭代得到

C_B	X_B	c_j	-3	0	1	0	0	-M	-M
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	x_2	5/2	-1/2	1	0	0	-1/4	1/4	1/4
1	x_3	3/2	3/2	0	1	0	3/4	-3/4	1/4
c_j-z_j			-9/2	0	0	0	-3/4	-M+3/4	-M-1/4

上表中所有检验数$\sigma_j \le 0$，且基变量中无人工变量，因此已得原问题的最优解

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0\right)^T,\quad z^* = \frac{3}{2}$$

该最优解为原问题的唯一最优解。

人工变量法——大M法

- **例8** 用单纯形法（**大M法**）求解线性规划问题

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

人工变量法——大M法

- **例8**

解：在约束条件中加入松弛变量x_4,剩余变量x_5,人工变量x_6,x_7,得到

$$\min z=-3x_1+x_2+x_3+0x_4+0x_5+Mx_6+Mx_7$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ -4x_1+x_2+2x_3-x_5+x_6=3 \\ -2x_1+x_3+x_7=1 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geq 0 \end{cases}$$

这里M为一个任意大的正数。

用单纯形法进行计算表格见下表。因本例是求min，故用所有$\sigma_j\geq 0$来判别目标函数是否实现了最小化。

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	$3/2$
M	x_7	1	-2	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	1
$c_j - z_j$			$-3+6M$	$1-M$	$1-3M$	0	M	0	0	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	
M	x_6	1	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$			-1	$1-M$	0	0	M	0	$3M-1$	

	$c_j \to$		-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	2	-5	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
	$c_j - z_j$		-1	0	0	0	1	$M-1$	$M+1$	
-3	x_1	4	1	0	0	$1/3$	$-2/3$	$2/3$	$-5/3$	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	9	0	0	1	$2/3$	$-4/3$	$4/3$	$-7/3$	
	$c_j - z_j$		0	0	0	$1/3$	$1/3$	$M-1/3$	$M-2/3$	

得到原问题最优解$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T=(4,1,9,0,0)^T$，目标函数的最优值为$z=-2$

人工变量法—大M法

- 备注
  - 用大M法处理人工变量，用手工计算求解时不会遇到麻烦。但是用计算机求解时，对M只能在计算机内输入一个机器最大字长的数字。
    - 若线性规划问题中的参数值与这个代表M的数相对接近，或远小于这个数字，由于计算机计算时取值上的误差，有可能使计算结果发生错误。
    - 为克服上述困难，在添加人工变量后，可以分两个阶段来求解相应的线性规划问题，称为两阶段法。

人工变量法—两阶段法

- 步骤
  - 第一阶段
    - 不考虑原问题是否存在基可行解；给原线性规划问题添加人工变量，并构造只包含人工变量的目标函数（人工变量的系数取某个正的常数，一般取1），且要求实现最小化。
    - 若第一阶段目标函数最优值为零，则说明原问题存在基可行解，可以进行第二阶段。否则，原问题无可行解，应停止计算。
  - 第二阶段
    - 将第一阶段计算得到的最终表除去人工变量，将目标函数行的系数换成原问题的目标函数系数，得到第二阶段计算的初始单纯形表，继续进行迭代。

人工变量法—两阶段法

第一阶段： 给原问题加入人工变量，构造如下问题：

$$\min \omega = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0, \quad x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解上述问题：

(1) 若得到$\omega = 0$,则原问题存在可行解，继续进行第二阶段计算

(2) 若得到$\omega \neq 0$,则原问题无可行解，停止计算

第二阶段： 将第一阶段得到的最终表删去人工变量，将目标行的系数换成原问题的目标函数系数，作为第二阶段的初始表，继续进行迭代。

人工变量法—两阶段法

- **例9** 用单纯形法（两阶段法）求解线性规划问题

$$\max Z = -3x_1 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

人工变量法—两阶段法

- 解:

第一阶段的数学模型为

$$\min w = x_6 + x_7$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_j \geq 0(j = 1, \ldots, 7) \end{cases}$$

用单纯形法求解，依次得下列各表:

C_B	X_B	c_j	0	0	0	0	0	1	1
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
1	x_6	1	-2	1	-1	0	-1	1	0
1	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1
c_j-z_j			2	-4	0	0	1	0	0

C_B	X_B	c_j	0	0	0	0	0	1	1
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	3	3	0	2	1	1	-1	0
0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0
1	x_7	6	6	0	4	0	3	-3	1
c_j-z_j			-6	0	-4	0	-3	4	0

C_B	X_B	c_j	0	0	0	0	0	1	1
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
0	x_1	1	1	0	2/3	0	1/2	- 1/2	1/6
c_j-z_j			0	0	0	0	0	1	1

第二阶段 $\max z = -3x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$

C_B	X_B	c_j / b	-3	0	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0
-3	x_1	1	1	0	2/3	0	1/2
c_j-z_j			0	0	3	0	3/2

C_B	X_B	c_j / b	-3	0	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2
0	x_2	5/2	-1/2	1	0	0	-1/4
1	x_3	3/2	3/2	0	1	0	3/4
c_j-z_j			-9/2	0	0	0	-3/4

上表中所有检验数$\sigma_j \le 0$，因此已得原问题的最优解

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,)^T = (0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0)^T，\quad z^* = \frac{3}{2}$$

该最优解为原问题的唯一最优解。

人工变量法——两阶段法

- **例10** 用单纯形法（两阶段法）求解线性规划问题

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

人工变量法—两阶段法

- 解:

第一阶段的数学模型为

$$\min \omega = x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解，依次得下列各表:

	$c_j \rightarrow$		0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	−2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	−4	1	2	0	−1	1	0	3/2
1	x_7	1	−2	0	[1]	0	0	0	1	1
	$c_j - z_j$		6	−1	−3	0	1	0	0	
0	x_4	10	3	−2	0	1	0	0	−1	
1	x_6	1	0	[1]	0	0	−1	1	−2	1
0	x_3	1	−2	0	1	0	0	0	1	
	$c_j - z_j$		0	−1	0	0	1	0	3	
0	x_4	12	3	0	0	1	−2	2	−5	
0	x_2	1	0	1	0	0	−1	1	−2	
0	x_3	1	−2	0	1	0	0	0	1	
	$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	1	1	

第一阶段得到$\omega=0$,相应的最优解为

$$x_1=0, x_2=1, x_3=1, x_4=12, x_5=x_6=x_7=0$$

从而得到原问题的一个可行解:$X^{(0)}=(0,1,1,12,0)^T$,进入第二阶段:

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	
c_j-z_j			-1	0	0	0	1	
-3	x_1	4	1	0	0	$1/3$	$-2/3$	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	
1	x_3	9	0	0	1	$2/3$	$-4/3$	
c_j-z_j			0	0	0	$1/3$	$1/3$	

得到最优解为$x_1=4, x_2=1, x_3=9$,最优目标值$z=-2$.

解的判别

举例说明用**单纯形法**求解线性规划问题时解的几种情况。

- 唯一最优解
  - 例5、例6、例7、例8
- 无穷多最优
  - 例11
- 无界解
  - 例12、例13
- 无可行解
  - 例14

解的判别

- 无穷多最优解

例11 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max z = 3x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_1 \le 12 \\ 4x_1 \qquad\quad \le 16 \\ \qquad\quad 5x_2 \le 15 \\ x_1, \quad x_2 \quad \ge 0 \end{cases}$$

解 的 判 别

- 无穷多最优解

解： 该线性规划问题的标准形式为

$$\max z = 3x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 & +2x_1 + & x_3 & & & = 12 \\ 4x_1 & & & + \quad x_4 & & = 16 \\ & 5x_2 & & & + \quad x_5 & = 15 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解，得其最终单纯形表为（见下表）

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
3	x_1	3	1	0	$^1/_2$	0	$-^1/_5$	-
0	x_4	4	0	0	-2	1	$^4/_5$	5
3	x_2	3	0	1	0	0	$^1/_5$	15
	σ_j		0	0	$-^3/_2$	0	0	

将x_5作为换入变量继续迭代，得到下表

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
3	x_1	4	1	0	0	$^1/_4$	0	16
0	x_5	5	0	0	$-^5/_2$	$^5/_4$	1	4
3	x_2	2	0	1	$^1/_2$	$-^1/_4$	0	-
	σ_j		0	0	$-^3/_2$	0	0	

从上述两表得到两个最优基可行解，其目标函数值相等，这两个顶点连线上所有点的目标函数值也相等，因此该问题有无穷多个最优解。

解的判别

- 无界解

例12 求解线性规划问题 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：将其化为标准形式后，列出初始单纯形表：

$c_j \to$			2	3	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	
0	x_3	16	4	0	1	
σ_j			2	3	0	

表中非基变量检验数$\sigma_2 > 0$，$\sigma_3 > 0$，但x_2对应的系数列向量为数字0，因此x_2的取值可无限增大，从而目标函数值可以无限增大，该问题为无界解。

解的判别

- 无界解

例13 求解线性规划问题

$$\min z = -x_1 - 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解： 将其化为标准形式

$$\min z = -x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解，得如下表格：

解的判别

- 无界解

解：

$c_j \rightarrow$			-1	-3	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	4	1	-2	1	0	
0	x_4	3	-1	1	0	1	3
σ_j			-1	-3	0	0	
0	x_3	10	-1	0	1	2	
-3	x_2	3	-1	1	0	1	
σ_j			-4	0	0	3	

上述第二个表中非基变量检验数$\sigma_1 = -4 < 0$，但x_1对应的系数列向量为$(-1, -1)^T$，因此x_1的取值可无限增大，从而目标函数值可以无限减小，该问题为无界解。

解的判别

- 无可行解

例14 求解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \ge 14 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：将其化为标准形式并添加人工变量，得到

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 14 \\ x_i \ge 0\ (i = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

用单纯形法（大M法）求解，得到下列表格。

解的判别

- 无可行解

用大M法求解**例14**依次得到下列单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	$-M$	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	12	2	2	1	0	0	6
$-M$	x_5	14	1	2	0	-1	1	7
σ_j			$2+M$	$3+2M$	0	$-M$	0	
3	x_2	6	1	1	0.5	0	0	
$-M$	x_5	2	-1	0	-1	-1	1	
σ_j			$-1-M$	0	$-1.5-2M$	$-M$	0	

上述第二个表中所有$\sigma_j \leq 0$，已是最终表，但人工变量x_5仍留在基变量中且不为零，故原问题无可行解。

解的退化与循环

- 在非退化前提下，即要求线性规划问题的所有基可行解为非退化解，则可保证单纯形法在有限步之后停止。
- 在实际中，用单纯形法求解线性规划问题，常会出现退化情况。
  - 比如，当用**θ规则**确定换出变量时，有时会出现两个或两个以上相同的最小比值，这样在后面的迭代中就可能会出现有一个或多个基变量等于零，这样就出现了**退化解**。这样，在接下来的迭代中，可能会出现换入变量取值为零的情况，此时迭代后目标函数值不变，这时不同基对应于同一顶点。从而在后续的迭代中，可能会出现计算的**循环**。

有学者构造了这样的特例，当出现退化时，进行多次迭代，而基从$B_1, B_2, \ldots, B_s$又退回到B_1，即出现计算过程的循环，若不改变计算规则，则永远达不到最优解。

解的退化与循环

- 避免循环的方法
  - 摄动法（1952，Charnes）
  - 字典序法（1954，Dantzig, Orden, Wolfe）
  - Bland规则（1977，Bland）

  对于**最大化**问题，

  - 选取$\sigma_j > 0$中下标最小的非基变量作为换入变量；
  - 当按θ规则计算存在两个或两个以上最小比值时，选取下标最小的基变量作为换出变量。

单纯形法的矩阵描述

这里以标准形式的线性规划问题为例进行说明。

- 用矩阵形式描述线性规划问题的标准形式为

$$\max z = CX$$
$$s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

其中$A = (a_{ij})_{m\times n}$为行满秩矩阵，$X^T = (x_1, \cdots, x_n)^T$，
$b^T = (b_1, \cdots, b_m)^T$， $c = (c_1, \cdots, c_n)$。

- 用单纯形法求解，设B是求解过程中的一个可行基，N是相应的非基矩阵，记：

$$A = (B, N)$$
$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$
$$C = (C_B, C_N)$$

单纯形法的矩阵描述

- 上述线性规划问题可表示为

$$\max z$$

$$s.t.\begin{cases} (B,N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b \\ -z+(C_B,C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

即

$$\max z$$

$$s.t.\begin{cases} BX_B + NX_N = b \\ -z + C_B X_B + C_N X_N = 0 \\ X_B, X_N \geq 0 \end{cases}$$

单纯形法的矩阵描述

可用初等行变换得到

- 基变量和目标函数可用非基变量表示为：

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$
$$z = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N$$

重要

- 令非基变量$X_N = 0$，可得
  - 基变量： $X_B = B^{-1}b$
  - 基可行解： $\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$
  - 目标函数值： $z = C_B B^{-1}b$
  - 非基变量检验数： $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1}N$
  - 基变量检验数： $\sigma_B = C_B - C_B B^{-1}B \quad (=0)$

$C_B B^{-1}$称为单纯形乘子

单纯形法的矩阵描述

- 初始单纯形表与后续各单纯形表之间的关系
  - 为方便描述单纯形法迭代过程中初始单纯形表与后续各单纯形表之间的关系，作如下处理。
  - 设**初始可行基**为单位阵I（总可以设法做到这一点），记为$B_0(=I)$， A中其余列向量构成非基矩阵N_0，此时
$$A=(N_0,B_0)=(N_0,I)$$
  - 设经过p次迭代后**当前可行基**为B_p，相应非基矩阵为N_p。B_p中可能还保留初始可行基I中的部分向量，可不妨设当前可行基B_p中已不含初始可行基I中的向量，此时记
$$A=\left(B_p,N_p\right)=(B_p,N_{0,p},I)$$
其中$N_{0,p}$为N_p中含在N_0中的部分。
  - 相应地，设$c=(c_{B_p},c_{N_{0,p}},c_I)$。

单纯形法的矩阵描述

重要

- 初始单纯形表与后续各单纯形表之间的关系
  - 初始单纯形表

	N_0		B_0
X_{B_0}	非基变量		基变量
b	B_p	$N_{0,p}$	I
σ_j	$c_{B_p} - c_{B_0}{B_0}^{-1}B_p$	$c_{N_{0,p}} - c_{B_0}{B_0}^{-1}N_{0,p}$	0

  - 当前单纯形表

(经过p次迭代，也可由初始单纯形表经初等行变换得到)

	B_p	N_p	
X_{B_p}	基变量	非基变量	
${B_p}^{-1}b$	I	${B_p}^{-1}N_{0,p}$	${B_p}^{-1}$
σ_j	0	$c_{N_{0,p}} - c_{B_p}{B_p}^{-1}N_{0,p}$	$c_{B_0} - c_{B_p}{B_p}^{-1}B_0$

单纯形法的矩阵描述

- **例15** 对1.5节例6的计算用矩阵描述。
（可参照《运筹学基础与应用（第六版）》41-43页）

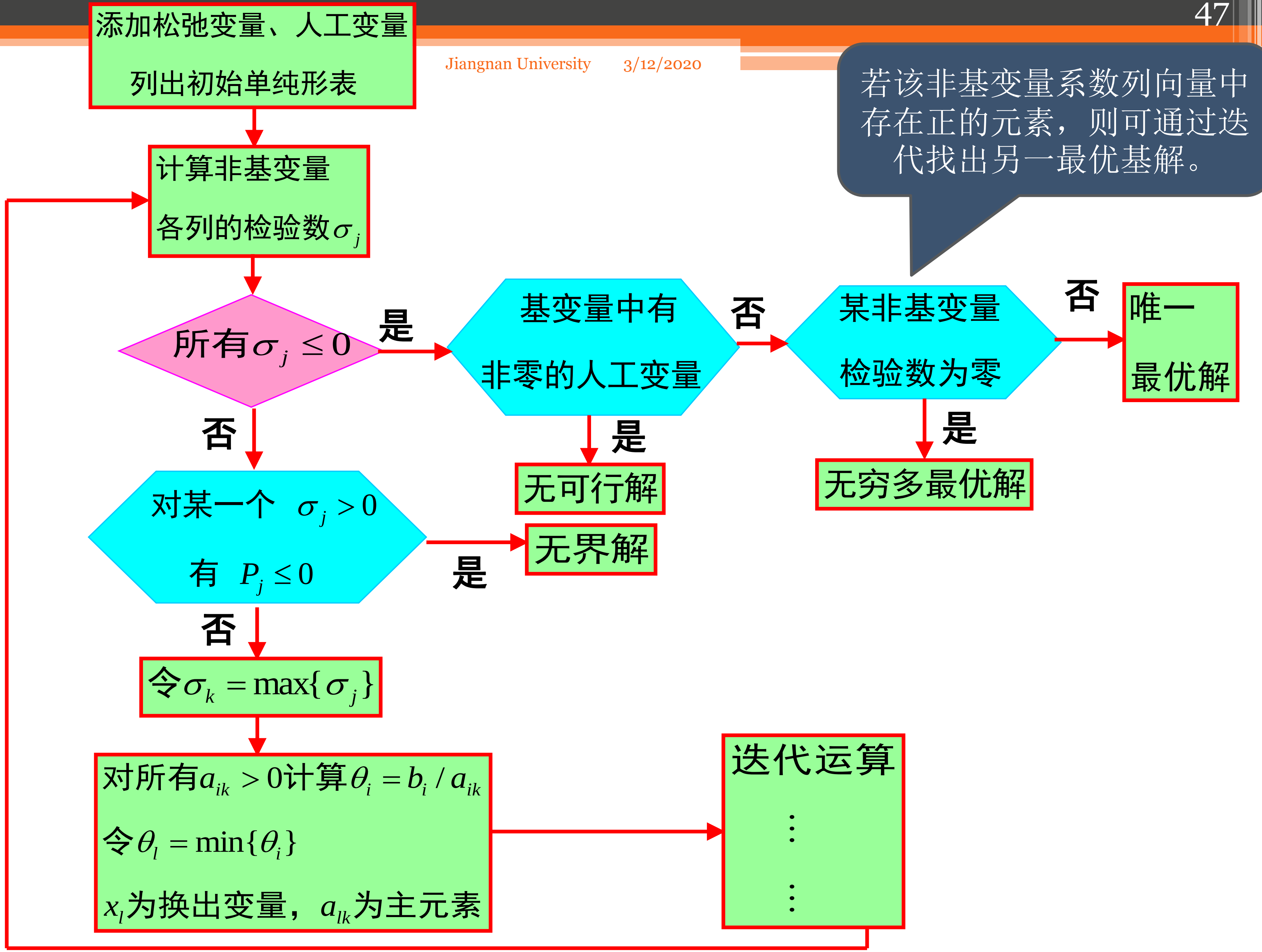
- **备注**
  - 上述讨论表明：对线性规划问题，只要给出一个新的可行基，就可以直接计算（初等行变换）得出新的单纯形表。这在对偶问题及灵敏度分析方面很有用处。
  - 可以从初始单纯形表和当前单纯形表中，分别获取当前可行基B 及其逆阵B^{-1} 。

单纯形法小结

- 初始单纯形表
- 单纯形法的计算框图（max型）

列出初始单纯形表

变量	$x_j \geq 0$		不需要处理
	$x_j \leq 0$		令$x_j' = -x_j; x_j' \geq 0$
	x_j无约束		令$x_j = x_j' - x_j''; x_j', x_j'' \geq 0$
约束条件	$b \geq 0$		不需要处理
	$b < 0$		约束条件两端同乘-1
	$\leq$		加入松弛变量x_{si}
	$=$		加入人工变量x_{ai}
	$\geq$		减去剩余（松弛）变量x_{si}，加入人工变量x_{ai}
目标函数	$\max z$		不需要处理
	$\min z$		令$z' = -z$，求$\max z'$
	加入变量的系数	松弛变量 x_{si}	0
		人工变量 x_{ai}	$-M$


添加松弛变量、人工变量
列出初始单纯形表
计算非基变量
各列的检验数σ_j
所有$\sigma_j \le 0$
是
基变量中有
非零的人工变量
是
无可行解
否
某非基变量
检验数为零
是
无穷多最优解
否
唯一
最优解
若该非基变量系数列向量中存在正的元素，则可通过迭代找出另一最优基解。
否
对某一个 $\sigma_j > 0$
有 $P_j \le 0$
是
无界解
否
令$\sigma_k = \max\{\sigma_j\}$
对所有$a_{ik} > 0$计算$\theta_i = b_i / a_{ik}$
令$\theta_l = \min\{\theta_i\}$
x_l为换出变量，a_{lk}为主元素
迭代运算
⋮
⋮

谢谢！

Thank you!