运筹与优化
Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

线性规划的对偶理论

第二章

灵 敏 度 分 析

第5节

灵敏度分析

- 灵敏度分析的研究内容
  - 前述的线性规划问题中，都假定问题中的参数a_{ij}, b_i, c_j为已知**常数**，但在大多数实际应用中，这些参数往往是一些估计和预测的数，因而常会随着市场条件、工艺技术条件、资源投资效益等的改变而变化。
  - 研究上述参数中的一个或多个发生变化时对问题最优解的影响（而无需重新求解相应问题），即为灵敏度分析（Sensitivity Analysis）的研究内容。

灵敏度分析

- 灵敏度分析的研究内容
  - 考虑如下线性规划问题：

$$\max z = cX; AX = b; X \geq 0$$

假设用单纯形法求解得到的最优基为B。研究对于下面的五种变化，不用重新求解，如何找到问题的新的最优解，确定参数的变化范围：

- 价值向量的改变
- 右端项的改变
- 约束矩阵的改变
- 增加一种新的生产活动
- 增加一个新的约束条件

参数在什么范围变化时，原最优解或最优基不变

模型发生变化时，最优解或最优基有何变化

灵敏度分析

- 步骤
  - 将参数的改变经计算反映到最终单纯形表上；
  - 检查原始问题是否为可行解；
  - 检查对偶问题是否为可行解；
  - 按下表所列情况得出结论和决定继续计算的步骤。

原始问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	仍为问题最优解
可行解	非可行解	用单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	非可行解	引进人工变量，编制新的单纯形表求最优解

分析c_j的变化范围

c_j的变化仅影响到**检验数**的变化，可将c_j的变化直接反映到最终单纯形表中

- 分两种情形（c_j变为c_j'）
  - **情形1：** c_j为非基变量x_j的系数
    - 此时，c_B不发生变化，因此
      $$z_j = c_B B^{-1} P_j, \qquad j = 1, \dots, n,$$
      亦不发生改变。
      因此，在最终表中，检验数由$c_j - z_j$变为$c_j' - z_j$。
    - 若
      $$c_j' - z_j = c_j - z_j + \left(c_j' - c_j\right) = c_j - z_j + \Delta c_j \le 0$$
      则原最优解仍为新问题的最优解。
    - 否则，取x_j为入基变量, 继续用**单纯形法**求解。

分析c_j的变化范围

- 分两种情形（c_j变为c_j'）
  - **情形2：** c_j为基变量x_j的系数
    - 此时，c_B发生变化：

    $c_B' = c_B + \Delta c_B$, $\Delta c_B = (0, \dots, 0, c_j' - c_j, 0 \dots 0)$
    - $c_k' - z_k' = c_k' - c_B' B^{-1} P_k = (c_k + \Delta c_k) - (c_B + \Delta c_B) B^{-1} P_k$

    $= (c_k - c_B B^{-1} P_k) + \Delta c_k - \Delta c_B B^{-1} P_k$

    $= (c_k - z_k) + \Delta c_k - (0, \dots, 0, c_j' - c_j, 0 \dots 0)\overline{P}_k$

    $= (c_k - z_k) + \Delta c_k - \Delta c_j \overline{a}_{jk}$

    若要求原最优解不变，则必须有：
      - 对于$k = j$，由于$c_j - z_j = 0$，$\overline{a}_{jk} = 1$，有$c_j' - z_j' = 0$;
      - 对于$k \neq j$，由于$\Delta c_k = 0$，有$c_k' - z_k' = (c_k - z_k) - \Delta c_j \overline{a}_{jk} \leq 0$

    从而可求得Δc_j的变化范围。

分析c_j的变化范围

- **例6** 已知线性规划问题

$$\max z = (2+\lambda_1)x_1 + (3+\lambda_2)x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \le 16 \\ 5x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

试分析λ_1和λ_2分别在什么范围内变化，问题的最优解不变。

分析c_j的变化范围

- **解**：

当$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$时，用单纯形法求解，得到上述线性规划问题的最终单纯形表：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3	1	0	$1/2$	0	$-1/5$
0	x_4	4	0	0	-2	1	$4/5$
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/5$
$c_j - z_j$			0	0	-1	0	$-1/5$

分析c_j的变化范围

- **解（续）**：

(1) 当$\lambda_2 = 0$时，将λ_1反映到上述最终单纯形表中，得到：

$c'_j \rightarrow$			$2+\lambda_1$	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$2+\lambda_1$	x_1	3	1	0	1/2	0	−1/5
0	x_4	4	0	0	−2	1	4/5
3	x_2	3	0	1	0	0	1/5
$c'_j - z'_j$			0	0	$-1-\frac{1}{2}\lambda_1$	0	$-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\lambda_1$

表中解为最优解的条件是：$-1-\frac{1}{2}\lambda_1 \le 0$，且$-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\lambda_1 \le 0$.

解得λ_1的变化范围为：$-2 \le \lambda_1 \le 1$.

表中检验数行可由第一行（价值系数所在行）经过初等行变换得到（把当前基变量对应的系数变为零）

分析c_j的变化范围

- **解（续）：**

(2) 当$\lambda_1 = 0$时，将λ_2反映到前述单纯形表中，得到：

$c_j' \rightarrow$			2	$3+\lambda_2$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3	1	0	1/2	0	−1/5
0	x_4	4	0	0	−2	1	4/5
$3+\lambda_2$	x_2	3	0	1	0	0	1/5
$c_j' - z_j'$			0	0	−1	0	$-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\lambda_2$

表中的解为最优解的条件是：$-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\lambda_2 \leq 0.$

解得λ_2的变化范围为：$-1 \leq \lambda_2 < +\infty.$

分析b_j的变化范围

b_j的变化反映到最终单纯形表上，只引起基变量列（表中b所在列）数字发生变化。

- 设b_j变为$b_j' = b_j + \Delta b_j$，而b列其他系数保持不变，则最终单纯形表中原始问题解的基变量由X_B变为
  $$X_B' = B^{-1}b' = B^{-1}(b + \Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b$$
  其中，$\Delta b = (0, \ldots, 0, \Delta b_j, 0, \ldots, 0)^T$
- 由于此时最终表中的检验数保持不变（即对偶可行性保持不变）。
  - 若$X_B' \geq 0$，当前最优基就保持不变，但最优解的值发生了变化，X_B'为新的最优解的基变量。
  - 若X_B'中有小于零的分量，则新的解已不是可行解，可用对偶单纯形法继续求解。

分析b_j的变化范围

- **例7** 已知线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 + \lambda_1 \\ 4x_1 \le 16 + \lambda_2 \\ 5x_2 \le 15 + \lambda_3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

试分析$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$分别在什么范围内变化，问题的最优基不变。

分析b_j的变化范围

- **解**：

当$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$时，上述线性规划问题的最终单纯形表如下：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3	1	0	$1/2$	0	$-1/5$
0	x_4	4	0	0	-2	1	$4/5$
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/5$
$c_j - z_j$			0	0	-1	0	$-1/5$

分析b_j的变化范围

- **解（续）：**

先分析当$\lambda_2=\lambda_3=0$时λ_1的变化。

显然由上述最终表，有

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/5\\ -2 & 1 & 4/5\\ 0 & 0 & 1/5\end{bmatrix},\ B^{-1}b=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$$

因此，

$$X'_B=B^{-1}b'=B^{-1}(b+\Delta b)=B^{-1}b+B^{-1}\Delta b$$

$$=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/5\\ -2 & 1 & 4/5\\ 0 & 0 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}1/2\\-2\\0\end{bmatrix}$$

分析b_j的变化范围

- **解（续）：**

要使问题的最优基保持不变，须使

$$X'_B=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}1/2\\-2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+\frac{1}{2}\lambda_1\\4-2\lambda_1\\3\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

由此得 $-6\leq\lambda_1\leq 2$.

同理分析λ_2,λ_3的变化，须分别使

$$X'_B=\begin{bmatrix}3\\4+\lambda_2\\3\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \text{ 和 } X'_B=\begin{bmatrix}3-\frac{1}{5}\lambda_3\\4+\frac{4}{5}\lambda_3\\3+\frac{1}{5}\lambda_3\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

分别得到$-4\leq\lambda_2\leq+\infty$ 和 $-5\leq\lambda_3\leq 15$.

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- 讨论两种情形
  - 非基变量的技术系数a_{ij}或P_j的变化
    - 假设非基变量x_j对应的技术系数向量由P_j变为P_j'，则在更新的最终单纯形表中，x_j对应的列变为$B^{-1}P_j'$，相应检验数变

$$c_j - z_j' = c_j - c_B B^{-1} P_j'$$

    - 若$c_j - z_j' \le 0$，则原最优解仍然保持最优性；否则，原最优解不再是最优解（基B的对偶可行性不再满足），可用**单纯形法**继续求解。
  - 基变量的技术系数a_{ij}或P_j的变化
    - 这种情形较为复杂，变化后的原始问题和对偶问题的解的可行性可能都会受到影响，若如此，则需要引进人工变量后重新求解。

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- **例8** 设某厂生产I、II两种产品的线性规划模型为

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

如果原最优计划中生产产品I的工艺结构有了改进，其技术系数向量变为$P_1' = (2,5,2)^T$，每件利润为4元，试分析对原最优计划有何影响？

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- **解:**

用单纯形法求解（**第一章例5**），得到工艺改进之前的最终单纯形表为

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	0	1	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	-0.125	0

把改进工艺结构后的产品I看做产品I$'$。

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- **解（续）：**

设产品I$'$的产量为x_1'，计算x_1'在最终表中对应的列向量$B^{-1}P_1'$和检验数σ_1':

$$B^{-1}P_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ -2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.125 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1' = c_1' - c_B B^{-1}P_1' = 4 - (2,0,3)\begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{bmatrix} = 0.375$$

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- **解（续）：**

以x_1'代替x_1，并将以上结果填入原最终表中x_1列的位置，得下表（此时并非为新问题的通常意义上的单纯形表）：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1.25	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0.5	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	0.375	1	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$			0.375	0	-1.5	-0.125	0

以x_1'为换入变量，以x_1为换出变量，经过迭代得到下表：

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- **解（续）：**

注意：若遇到原始问题与对偶问题均为非可行解时，则需要引入**人工变量**后继续求解。

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1'	3.2	1	0	0	0.2	0
0	x_5	2.4	0	0	-2	0.4	1
3	x_2	0.8	0	1	0.5	-0.2	0
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	-0.2	0

由上表可知，原始问题与对偶问题均为可行解，因此表中的结果已是最优解。

按题设条件改进产品I的工艺结构后，基变量保持不变，但最优解的值发生了改变，最优生产计划中生产产品I′和产品II的产量应分别为3.2件和0.8件，可获最大利润为15.2元。

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- **例9** 假设例8中产品I的技术系数向量变为

$$P_1' = (4,5,2)^T$$

而每件利润仍为4元，问该厂应如何安排最优生产方案？

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	0	1	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	-0.125	0

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- **解**:

方法与例8相同。

把改进工艺结构的产品I看做产品I′，设其产量为x_1'，计算x_1'在最终表中对应的列向量$B^{-1}P_1'$和检验数σ_1':

$$B^{-1}P_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ -2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.125 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ -3.5 \\ 1.375 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1' = c_1' - c_B B^{-1}P_1' = 4 - (2,0,3)\begin{bmatrix} 1.25 \\ -3.5 \\ 1.375 \end{bmatrix} = -2.625$$

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- **解（续）：**

以x_1'代替x_1，并将以上结果填入原最终表中x_1列的位置，得下表（并非为新问题的通常意义上的单纯形表）：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1.25	0	0	0.25	0
0	x_5	4	-3.5	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	1.375	1	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$			-2.625	0	-1.5	-0.125	0

以x_1'为换入变量，以x_1为换出变量，经过迭代得到下表：

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- **解（续）：**

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1'	3.2	1	0	0	0.2	0
0	x_5	15.2	0	0	-2	1.2	1
3	x_2	-2.4	0	1	0.5	-0.4	0
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	0.4	0

可见原问题与对偶问题均为非可行解，故引入人工变量x_6。

上表中x_2所在行对应的约束方程可表示为

$$x_2 + 0.5x_3 - 0.4x_4 + 0x_5 = -2.4$$

引入人工变量x_6后，得到

$$-x_2 - 0.5x_3 + 0.4x_4 + x_6 = 2.4$$

将人工变量x_6代替基变量x_2 填入上表，经迭代得到下表：

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- 解（续）：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	-M
c_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_1'	3.2	1	0	0	0.2	0	0
0	x_5	15.2	0	0	-2	1.2	1	0
-M	x_6	2.4	0	-1	-0.5	0.4	0	1
$c_j - z_j$			0	3-M	-0.5M	-0.8+0.4M	0	0

（注意：该表中的检验数行已通过初等行变换重新计算，可通过对价值系数行作初等行变换得到）

这时可按单纯形法进行求解。以x_4为换入变量， x_6为换出变量，经迭代运算后得到下表：

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- **解（续）：**

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	$-M$
c_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_1'	2	1	0.5	0.25	0	0	-0.5
0	x_5	8	0	3	-0.5	0	1	-3
0	x_4	6	0	-2.5	-1.15	1	0	2.5
$c_j - z_j$			0	1	-1	0	0	$-M$+2

上表中，以x_2为换入变量，x_5为换出变量，经迭代运算后得到下表：

技术系数a_{ij}或P_j的变化分析

- 解（续）：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	-*M*
c_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_1'	0.667	1	0	0.00	0	-0.165	0
3	x_2	2.667	0	1	-0.167	0	0.33	-1
0	x_4	12.667	0	0	1.667	1	0.83	0
$c_j - z_j$			0	0	-0.83	0	-0.33	-*M*+3

上表中所有检验数均已小于等于零，已得最优解。

最优生产方案为生产产品I′和产品II分别为0.667件和2.667件，可获最大利润为10.67元。

增加一个变量的分析

- 增加一个变量x_j在实际中表现为增加一种新产品。
- 分析步骤：
  - (1) 计算 $B^{-1}P_j$；
  - (2) 计算 $\sigma_j = c_j - z_j = c_j - c_B B^{-1} P_j$ ；
  - (3) 只需将$B^{-1}P_j$和σ_j的值直接反映到最终单纯形表中：
    - 若$\sigma_j \leq 0$，原最优解不变；
    - 若$\sigma_j > 0$，则按单纯形法继续迭代计算。

增加一个变量的分析

- **例10** 第一章例2中线性规划问题的最终单纯形表如下：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3	1	0	$1/2$	0	$-1/5$
0	x_4	4	0	0	-2	1	$4/5$
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/5$
$c_j - z_j$			0	0	-1	0	$-1/5$

若增加一个变量x_6，有$c_6 = 4$，$P_6 = (2,4,5)^T$，试分析问题最优解的变化。

增加一个变量的分析

- **解：**

计算x_6在上述最终表中对应的列向量和检验数：

$$B^{-1}P_6=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/5\\ -2 & 1 & 4/5\\ 0 & 0 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}$$

$$\sigma_6=c_6-c_BB^{-1}P_6=4-(2,0,3)\begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}=1$$

将上述结果代入上表中得到如下单纯形表：

增加一个变量的分析

- **解（续）：**

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	4
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	3	1	0	1/2	0	−1/5	0
0	x_4	4	0	0	−2	1	4/5	4
3	x_2	3	0	1	0	0	1/5	1
$c_j - z_j$			0	0	−1	0	−1/5	1

由于$\sigma_6 = 1 > 0$，继续用**单纯形法**进行迭代，得到下表：

增加一个变量的分析

- **解（续）：**

$c_j \to$			2	3	0	0	0	4
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	3	1	0	1/2	0	−1/5	0
4	x_6	1	0	0	−1/2	1/4	1/5	1
3	x_2	2	0	1	1/2	− 1/4	0	0
$c_j - z_j$			0	0	−1/2	− 1/4	− 2/5	0

该表中所有检验数均小于等于零，已得最优解。

故新的最优解为$X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*)^T = (3,2,0,0,0,1)^T$，

$z^* = 16$.

增加一个约束条件的分析

- 增加一个约束条件，在实际问题中相当于增加一道工序。

- 分析方法：
  - 检验原来问题的最优解是否满足新增加的约束条件：
    - 如果满足，则说明此约束条件未起到限制作用，原最优解不变；
    - 否则，将最终表中基变量的表达式代入新增约束（或将约束条件加松弛变量后，直接放入最终单纯形表中进一步整理），整理后放入最终表中，继续进行迭代。

增加一个约束条件的分析

- 例11 第一章例2中线性规划问题的最终单纯形表如下：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3	1	0	$1/2$	0	$-1/5$
0	x_4	4	0	0	-2	1	$4/5$
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/5$
$c_j - z_j$			0	0	-1	0	$-1/5$

若增加一个约束条件 $3x_1 + 2x_2 \leq 14$，试分析问题最优解的变化。

增加一个约束条件的分析

- **解：**

将原来问题的最优解代入新增约束，易知约束条件不满足。因此，将新增约束加入松弛变量x_6的得到方程

$$3x_1 + 2x_2 + x_6 = 14$$

将其直接反映到上述最终表中，得到下表：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	3	1	0	1/2	0	−1/5	0
0	x_4	4	0	0	−2	1	4/5	0
3	x_2	3	0	1	0	0	1/5	0
0	x_6	14	3	2	0	0	0	1
$c_j - z_j$			0	0	−1	0	−1/5	0

对上表作初等行变换，得到相应的单纯形表：

增加一个约束条件的分析

- 解（续）：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	3	1	0	$1/2$	0	$-1/5$	0
0	x_4	4	0	0	-2	1	$4/5$	0
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/5$	0
0	x_6	-1	0	0	$-3/2$	0	$1/5$	1
$c_j - z_j$			0	0	-1	0	$-1/5$	0

该单纯形表对应的解非可行解，但相应对偶问题的解为可行解，因此可用对偶单纯形法继续迭代，得到下表：

增加一个约束条件的分析

- 解（续）：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	8/3	1	0	0	0	−2/15	1/3
0	x_4	16/3	0	0	0	1	8/15	−4/3
3	x_2	3	0	1	0	0	1/5	0
0	x_3	2/3	0	0	1	0	−2/15	−2/3
$c_j - z_j$			0	0	0	0	− 1/3	−2/3

此时，新增约束后的问题已得到最优解，其最优解为

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*)^T = (8/3, 3, 2/3, 16/3, 0, 0)^T$$

最优目标函数值为 $z^* = 43/3$.

谢 谢！

Thank you!