图与网络分析

第六章

网络最大流问题

第4节

对于有多个发点和多个收点的网络，可以另外虚设一个总发点和一个总收点，并将其分别与各发点和各收点连起来，则可转化为只含一个发点和一个收点的网络。

基本概念

- 网络与流
  - 给定**有向图**$D=(V,A)$，在V中指定一个点称为**发点**（记为v_s）,而另一个点称为**收点**（记为v_t），其余点为**中间点**。
  - 对应每条弧$(v_i,v_j)\in A$有一个权值 $u(v_i,v_j)\geq 0$ （简写为u_{ij}），称为**弧的容量**。
    - 对应每条弧$(v_i,v_j)\in A$还可赋予一个权值 $l(v_i,v_j)$（简写为l_{ij}），通常取$l_{ij}=0$。
  - 通常称上述这样的网络为**容量网络**(capacitated network)，记作$D=(V,A,U)$。
  - 网络上的**流**，是指定义在弧集A上的一个函数$f=\{f(v_i,v_j)\}$，并称$f(v_i,v_j)$为弧(v_i,v_j)上的**流量**（简记为f_{ij}）。

基本概念

- 可行流与最大流
  - 网络$D=(V,A,U)$上满足下述条件的流f称为**可行流**：
    - (1) 容量限制条件：对每一弧$(v_i,v_j)\in A$，有$0=l_{ij}\le f_{ij}\le u_{ij}$
    - (2) 流量平衡条件：
      - 对于**中间点**：$\sum_{(v_i,v_j)\in A} f_{ij}-\sum_{(v_j,v_i)\in A} f_{ji}=0 \quad (\forall i\neq s,t)$
      - 对于**发点**：$\sum_{(v_s,v_j)\in A} f_{sj}-\sum_{(v_j,v_s)\in A} f_{js}=v(f)$
      - 对于**收点**：$\sum_{(v_t,v_j)\in A} f_{tj}-\sum_{(v_j,v_t)\in A} f_{jt}=-v(f)$

      $v(f)$称为该可行流的**流量**
  - **零流**：所有弧上的流量$f_{ij}=0$的流f称为零流。
    - 零流的流量为零。（流量为零的流不一定是零流。）
    - 零流是可行流。

基本概念

- 可行流与最大流
  - 网络$D=(V,A,U)$上的**最大流问题**(maximum flow problem)即寻找网络上流量最大的可行流f，其数学模型为：

$$\max v(f)$$

$$\sum_{(v_i,v_j)\in A} f_{ij} - \sum_{(v_j,v_i)\in A} f_{ji} = \begin{cases} v(f) & \text{for } i=s \\ 0 & \text{for all } i\neq s,t \\ -v(f) & \text{for } i=t \end{cases}$$

$$l_{ij}\le f_{ij}\le u_{ij}\ \ \text{for each } (i,j)\in A \quad （通常取 l_{ij}=0）$$

  - 最大流问题是一个特殊的线性规划问题，可以利用其特殊的网络结构，设计出比求解线性规划的一般方法更为简洁、直观、高效的算法。

基本概念

- 增广链
  - 给定网络 $D=(V,A,U)$ 中的一个可行流 $f=\{f_{ij}\}$，定义：
    - 使$f_{ij}=u_{ij}$的弧称为**饱和弧**，使$f_{ij}<u_{ij}$的弧称为**非饱和弧**；
    - 使$f_{ij}=0$的弧称为**零流弧**，使$f_{ij}>0$的弧称为**非零流弧**.
  - 给定网络$D=(V,A,U)$中从发点v_s到收点v_t的一条**链**μ，定义**链μ的方向**为从v_s到v_t，则链μ上的弧被分为两类：
    - 前向弧：弧的方向和链的方向一致，其全体记为μ^+；
    - 后向弧：弧的方向和链的方向相反，其全体记为μ^-.

沿着增广链对可行流的流量进行调整，可使得原可行流的流量有所增加（**增广链**由此得名）

基本概念

- 增广链
  - 设$f=\{f_{ij}\}$是一个可行流，μ是从v_s到v_t的一条**链**，若μ满足下列条件，则称之为关于可行流f的（从v_s到v_t）的**增广链 (augmenting chain)**：
    - 在$(v_i,v_j)\in\mu^+$上，$0\le f_{ij}<u_{ij}$，即：所有前向弧都是非饱和弧；
    - 在$(v_i,v_j)\in\mu^-$上，$0<f_{ij}\le u_{ij}$，即：所有后向弧都是非零流弧。

基本概念

- 割与割的容量
  - 给定网络$D=(V,A,U,L)$，若点集V被剖分成两个非空集合V_1和$\bar{V}_1$，使$v_s\in V_1, v_t\in \bar{V}_1$，则称弧集$[V_1,\bar{V}_1]$为（分离$v_s$和$v_t$的）**割(cut)**，并称弧集$(V_1,\bar{V}_1)$为（分离$v_s$和$v_t$的）**前向割(forward cut)**，弧集$(\bar{V}_1,V_1)$为（分离v_s和v_t的）**后向割(reverse/backward cut)**。
    - $[V_1,\bar{V}_1]$表示由所有一个端点(始点或终点)在V_1而另一端点在$\bar{V}_1$的弧构成的集合
    - $(V_1,\bar{V}_1)$表示由所有始点在V_1、终点在$\bar{V}_1$的弧构成的集合
    - $(\bar{V}_1,V_1)$表示由所有始点在$\bar{V}_1$、终点在V_1的弧构成的集合
  - **注意**：
    - 割(cut)和割集(cut-set)是两个不同的概念，应注意区分。

基本概念

- 割与割的容量
  - 给定网络$D=(V,A,U,L)$中的一个割$[V_1,\bar{V}_1]$，$(V_1,\bar{V}_1)$和$(\bar{V}_1,V_1)$分别为相应的前向割和后向割，则
  $$u[V_1,\bar{V}_1]=\sum_{(v_i,v_j)\in(V_1,\bar{V}_1)}u_{ij}-\sum_{(v_i,v_j)\in(\bar{V}_1,V_1)}l_{ij}$$
  称为割$[V_1,\bar{V}_1]$的容量。
    - 对于所有$l_{ij}=0$的网络D，前向割的容量$u(V_1,\bar{V}_1)$等于割$[V_1,\bar{V}_1]$的容量$u[V_1,\bar{V}_1]$，即$u[V_1,\bar{V}_1]=u(V_1,\bar{V}_1)$。
  - 网络D的所有割中容量最小的割称为**最小割** (**minimum cut**).

基本理论

- **性质1** 网络中任一可行流的流量不超过任一割的容量，即

$$v(f) \le u[V_1, \bar{V}_1]$$

  - **证明：**

设$[V_1, \bar{V}_1]$为网络$D=(V,A,U,L)$中(分离v_s和v_t 的)任一割， $f=\{f_{ij}\}$为任一可行流，则将V_1中各点的流量平衡方程相加得到

$$\sum_{v_i \in V_1}\left(\sum_{(v_i,v_j)\in A} f_{ij} - \sum_{(v_j,v_i)\in A} f_{ji}\right) = v(f)$$

从而有

$$\sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in \bar{V}_1 \\ (v_i,v_j)\in A}} f_{ij} - \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in \bar{V}_1 \\ (v_j,v_i)\in A}} f_{ji} + \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in V_1 \\ (v_i,v_j)\in A}} f_{ij} - \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in V_1 \\ (v_j,v_i)\in A}} f_{ji} = v(f)$$

基本理论

- **性质1** 网络中任一可行流的流量不超过任一割的容量，即

$$v(f) \le u[V_1,\bar{V}_1]$$

  - **证明(续)**:

注意到上式左端最后两项**抵消**后为零，因此得到

$$v(f) = \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in \bar{V}_1 \\ (v_i,v_j) \in A}} f_{ij} - \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in \bar{V}_1 \\ (v_j,v_i) \in A}} f_{ji} = \sum_{(v_i,v_j) \in (V_1,\bar{V}_1)} f_{ij} - \sum_{(v_i,v_j) \in (\bar{V}_1,V_1)} f_{ij}$$

由于$l_{ij} \le f_{ij} \le u_{ij}$，故有

$$v(f) \le \sum_{(v_i,v_j) \in (V_1,\bar{V}_1)} u_{ij} - \sum_{(v_i,v_j) \in (\bar{V}_1,V_1)} l_{ij} = u[V_1,\bar{V}_1]$$

基本理论

- **定理3 (增广链定理)**　网络$D=(V,A,U)$中的可行流f为**最大流**当且仅当D中不存在关于f的增广链。
  - **证明：**

(1) 必要性。

反证法。设f是最大流，**假设**D中存在一条关于f的增广链μ，令

$$\theta=\min\left\{\min_{\mu^+}\{u_{ij}-f_{ij}\},\min_{\mu^-}\{f_{ij}\}\right\}$$

则由增广链的定义可知$\theta>0$，令

$$f'_{ij}=\begin{cases}f_{ij}+\theta, & (v_i,v_j)\in\mu^+\\ f_{ij}-\theta, & (v_i,v_j)\in\mu^-\\ f_{ij}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

容易验证f'仍为D中的可行流，且$v(f')=v(f)+\theta>v(f)$，与f是最大流**矛盾**。

基本理论

- **定理3 (增广链定理)** 网络$D=(V,A,U)$中的可行流f为**最大流**当且仅当D中不存在关于f的增广链。
  - **证明(续):**

(2) 充分性。

若D中不存在关于可行流f的从v_s到v_t的增广链，令V_1为V中所有这样的点v的集合：从v_s到该点v(包括点v_s本身)存在增广链。

显然，$v_s\in V_1, v_t\notin V_1$，因此令$\bar{V}_1=V-V_1$，则$[V_1,\bar{V}_1]$为网络$D$的一个**割**，且满足

$$\boxed{f_{ij}=\begin{cases}u_{ij}, & \text{if } (v_i,v_j)\in(V_1,\bar{V}_1)\\ l_{ij}=0, & \text{if } (v_i,v_j)\in(\bar{V}_1,V_1)\end{cases}}$$

(否则，与$V_1,\bar{V}_1$的定义不符)

从而
$$\begin{aligned}v(f)&=\sum_{(v_i,v_j)\in(V_1,\bar{V}_1)}f_{ij}-\sum_{(v_i,v_j)\in(\bar{V}_1,V_1)}f_{ij}\\&=\sum_{(v_i,v_j)\in(V_1,\bar{V}_1)}u_{ij}-\sum_{(v_i,v_j)\in(\bar{V}_1,V_1)}l_{ij}=u[V_1,\bar{V}_1]。\end{aligned}$$

因此由**性质1**可知，f为最大流，且$[V_1,\bar{V}_1]$为最小割，结论得证。

基本理论

- **定理4 (最大流最小割定理)** 在任一网络$D = (V, A, U)$中，从v_s到v_t的最大流的流量等于分离v_s, v_t的最小割的容量。
  - **证明：** 由定理3的证明可知结论成立。

- **备注：**
  - 定理3(增广链定理)的证明过程提供了一种寻求最大流的方法：
    - 给定一个可行流f（比如**零流**），判断是否有关于f的增广链；
    - 若有增广链，则沿增广链改进可行流f，得到一个流量增大的新的可行流f'；
    - 若无增广链，则当前流就是最大流，并可得到相应的最小割。

寻求最大流的标号法(Ford-Fulkerson)

- 对于给定网络$D=(V,A,U)$，从一个可行流f (若未预先给定，则可取f为零流) 出发，经下述标号过程和调整过程寻求最大流：
- (1) 标号过程
  - 首先给v_s标上$(0,+\infty)$，这时v_s是标号而未检查的点，其余都是未标号点。
  - 一般地，取一个**标号而未检查的点**v_i，对与v_i相邻的**所有未标号点**v_j：
    - 若在弧(v_i,v_j)上，$f_{ij}<u_{ij}$，则给v_j标号$(v_i,l(v_j))$，这里$l(v_j)=\min\{l(v_i),u_{ij}-f_{ij}\}$。这时$v_j$成为标号而未检查的点。
    - 若在弧(v_j,v_i)上，$f_{ji}>0$，则给v_j标号$(-v_i,l(v_j))$，这里$l(v_j)=\min\{l(v_i),f_{ji}\}$。这时$v_j$成为标号而未检查的点。
  - 这样v_i成为**标号且已检查的点**。重复上述步骤，**一旦v_t被标号**，表明得到一条从v_s到v_t的**增广链**μ，转入**(2)调整过程**。
  - 若所有标号都已检查过，而标号过程进行不下去，且v_t未被标号，则表明网络不存在从v_s到v_t的增广链，**算法结束**，这时的可行流即为**最大流**。记已标号点的集合为V_1，未标号点的集合为$\bar{V}_1$，则$[V_1,\bar{V}_1]$为网络的**最小割**。

寻求最大流的标号法(Ford-Fulkerson)

- (2) 调整过程
  - 首先根据v_t及其他标号点的第一个标号，利用“**反向追踪**”的方法，找出从v_s到v_t的**增广链** μ。
  - 然后取调整量$\theta = l(v_t)$，令

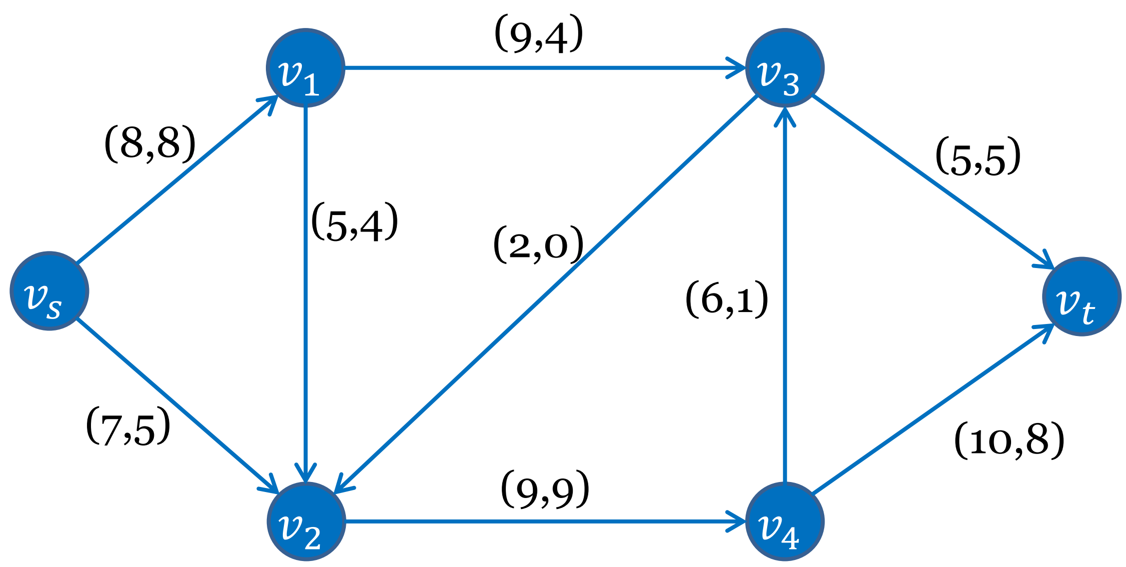
$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \theta, & (v_i, v_j) \in \mu^+ \\ f_{ij} - \theta, & (v_i, v_j) \in \mu^- \\ f_{ij}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

去掉所有标号，得到一个新的可行流f'，重新进入**(1)**标号过程。

- 备注：
  - L.R. Ford, D.R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian Journal of Mathematics*, 8 (1956), 399-404.

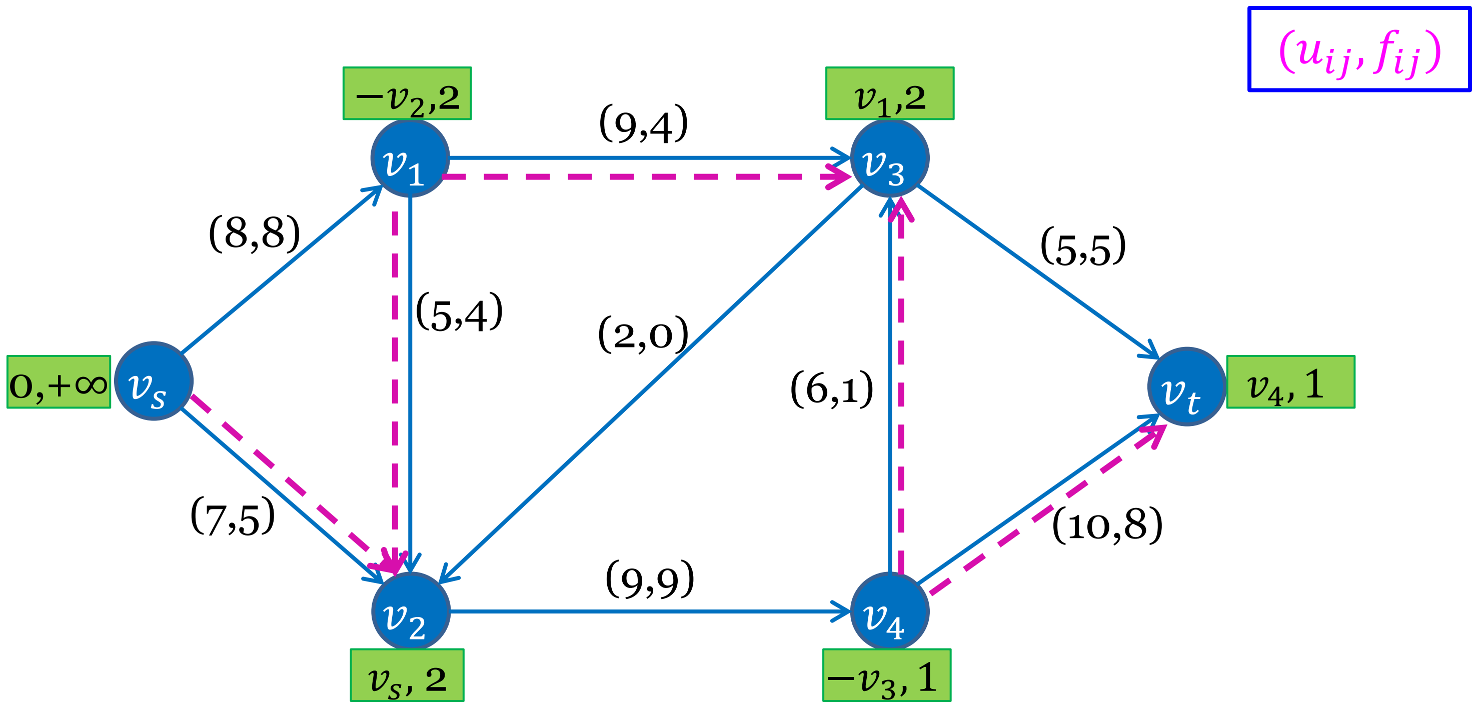
寻求最大流的标号法(Ford-Fulkerson)

- **例7** 用 Ford-Fulkerson 标号法求下图所示网络中从v_s到v_t的最大流（弧旁数字为(u_{ij}, f_{ij})），并找出该网络的最小割及相应的前向割。



寻求最大流的标号法(Ford-Fulkerson)

- **解**：用Ford-Fulkerson标号法求网络最大流的过程如下图所示：

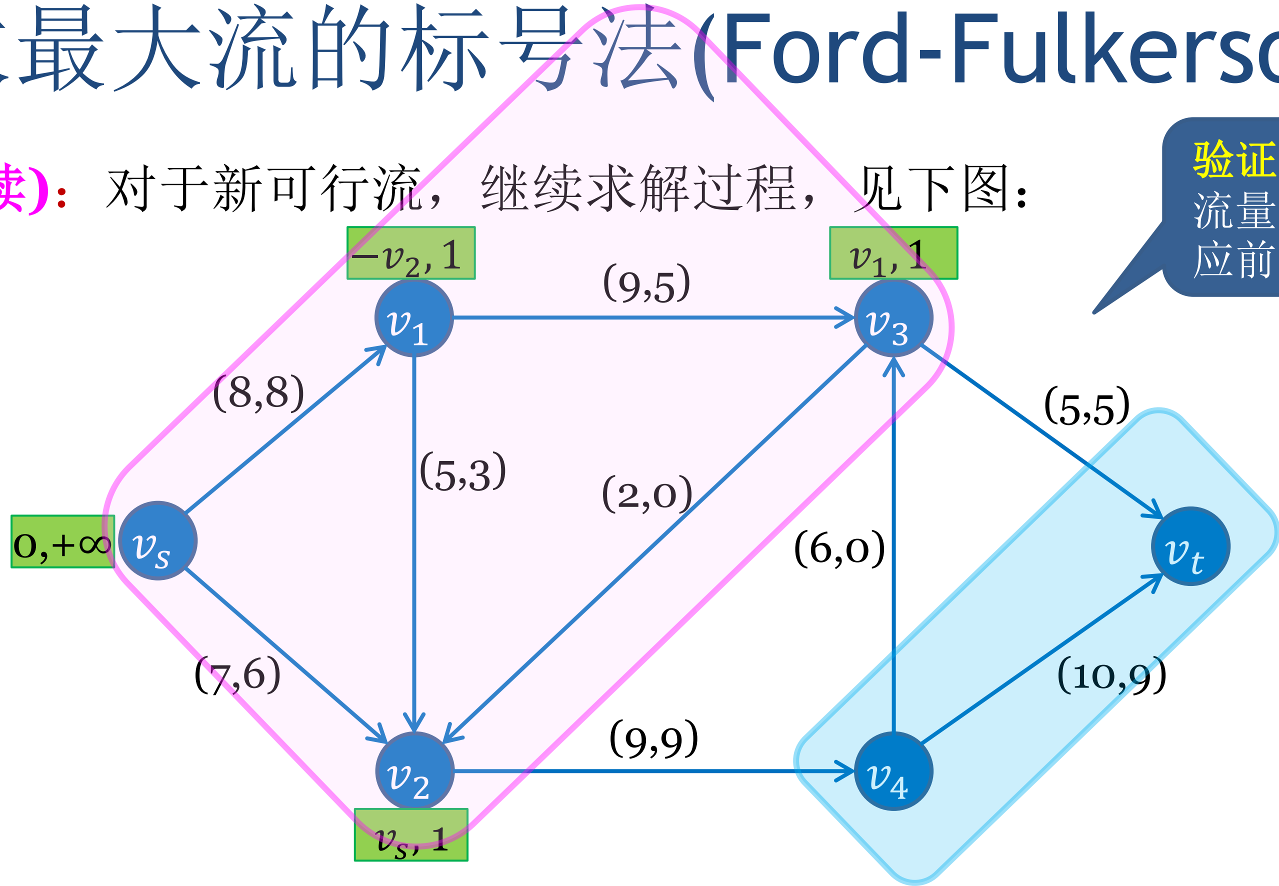


v_t得到标号$(v_4, 1)$，采用“**反向追踪**”法得到增广链μ，沿μ调整当前流，得到新的可行流（见下图），其流量为13+1=14。

Haiyan Lu
Jiangnan University 4/27/2020

寻求最大流的标号法(Ford-Fulkerson)

- **解(续)**：对于新可行流，继续求解过程，见下图：



验证：该最大流的流量和最小割及相应前向割的容量。

标号过程结束，v_t 未被标号，因此当前流即为该网络的**最大流**，其流量为14；记$V_1 = \{v_s, v_1, v_2, v_3\}$，$\bar{V}_1 = \{v_4, v_t\}$，则

$[V_1, \bar{V}_1] = \{(v_3, v_t), (v_2, v_4), (v_4, v_3)\}$为**最小割**，

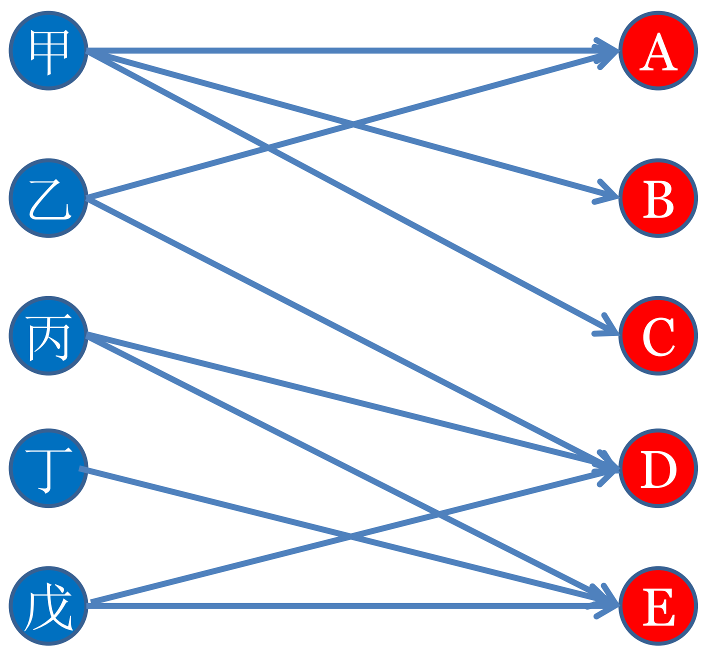
$(V_1, \bar{V}_1) = \{(v_3, v_t), (v_2, v_4)\}$为相应于该最小割的**前向割**。

应用举例

- 最大匹配问题
  - 二部图中的最大匹配问题，可以化为最大流问题来求解。
  - 类似于多发点多收点最大流问题，在二部图中增加两个新点v_s和v_t分别作为发点和收点，并用有向边把它们与原二部图中顶点相连，令全部边上的容量均为1。
  - 当这个网络的流量达到最大时，即可得到原二部图的最大匹配。

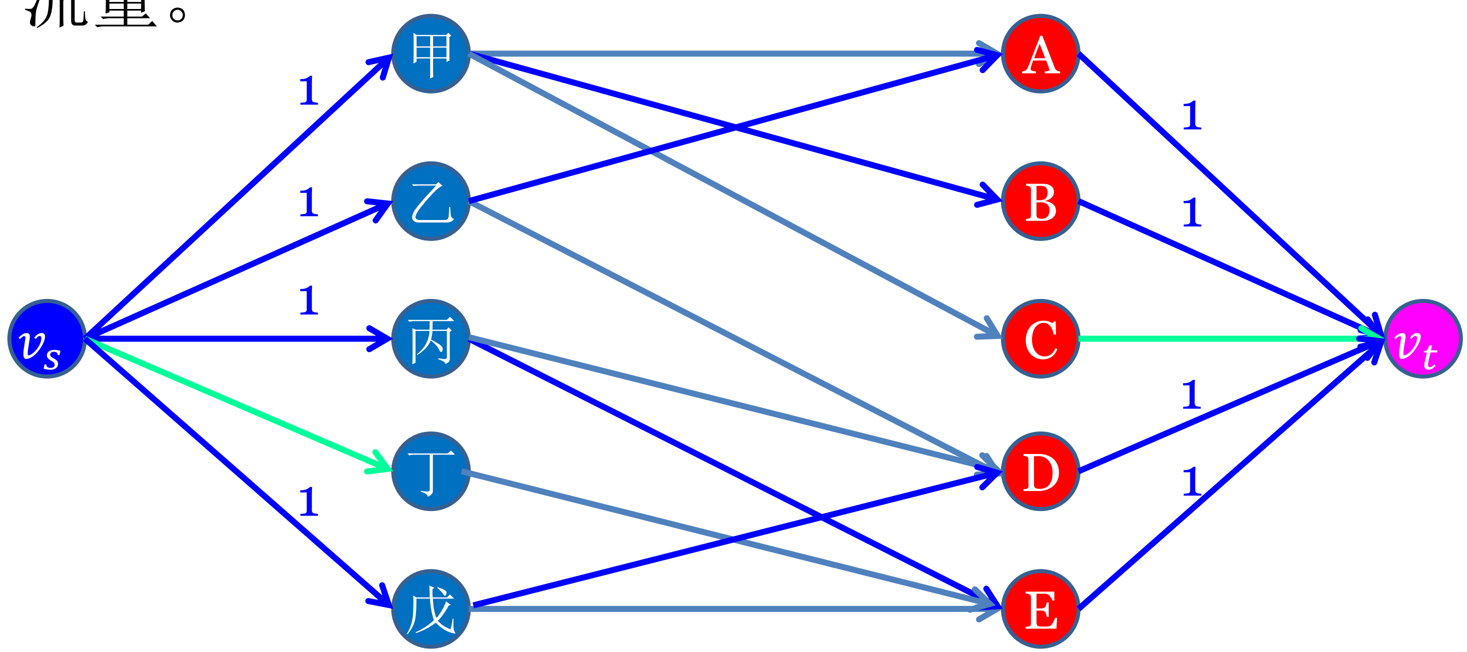
应用举例

- **例8** 设有甲、乙、丙、丁、戊共5位待业者，A、B、C、D、E共5项工作，5人各自能胜任的工作情况如下图所示。要求设计一个就业方案使尽量多的人能就业。



应用举例

- **解：** 增加虚拟的发点v_s和收点v_t，用Ford-Fulkerson标号法求解得到最大流及最大匹配方案（最多可安排4人就业），见下图，其中弧的容量已去掉，只标出了流量。



Thank you!

谢谢！