运筹与优化
Operations Research & Optimization

鲁海燕
江南大学理学院
信息与计算科学系
2019-2020-2学期
Email: luhaiyan@jiangnan.edu.cn

目标规划

第四章

内 容 提 要

- 目标规划问题及其数学模型
- 求解目标规划的图解法
- 求解目标规划的单纯形法

目标规划问题及其数学模型

第1节

目标规划问题的提出

- 线性规划模型的局限性
  - (1)线性规划只能处理单目标的优化问题，无法处理存在多个目标，特别是目标间无法用同一量纲来度量以及目标间存在冲突的情形。
  - (2)线性规划中的约束是刚性的、绝对的约束（称为硬约束），是必须满足的约束条件，不允许约束资源有丝毫超差。
  - (3)线性规划追求最优解，而现实生活中最优只是相对的，即没有绝对意义下的最优，只有相对意义下的满意。
- 线性目标规划（Linear Goal Programming），简称目标规划，是为了解决线性规划的上述不足而创建的一类数学模型。

目标规划问题的提出

- 相关背景
  - 1961年，美国经济学家查恩斯（A. Charnes）和库珀（W.W. Cooper）首次提出了目标规划的有关概念和数学模型（《管理模型和线性规划的工业应用》）。
  - 1965年，尤吉·艾吉里（*Yuji · Ijiri*）等人在处理多目标问题，分析各类目标的重要性时，引入优先因子及权系数等概念，进一步完善了目标规划模型。
  - 1976年，伊格尼奇奥（J.P. Ignizio）发表了《目标规划及其扩展》一书，系统总结了目标规划的理论和方法。
  - 后来有学者改进了求解方法，近些年又有新的发展。

目标规划问题的提出

- 相关背景
  - 1978年，美国经济学家西蒙（H.A. Simon）教授从企业管理的角度提出“满意行为模型要比最大化行为模型丰富得多”，否定了企业的决策者是“经济人”的概念和“最大化”的行为准则，提出了“管理人”的概念和“令人满意”的行为准则，对现代企业管理的**决策科学**进行了开创性的研究。
  - 目前研究较多的有线性目标规划、非线性目标规划、非线性整数目标规划和0-1目标规划等。本章主要讨论线性目标规划。
  - 简言之，**目标规划**研究企业考虑在现有的资源条件下，从多个经营目标中去寻求**满意解**，即使得所达到目标的总体结果离事先制定的目标的差距为最小。

目标规划问题的提出

- 引例
  - **例1** 第一章例2中给出了常山机器厂如何安排生产计划，使在计划期内的总利润收入为最大。在不考虑市场等一系列其他条件时，这是一个**单目标规划问题**，其线性规划模型为

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \le 16 \\ 5x_2 \le 15 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

其最优解决方案为$x_1^* = 3, x_2^* = 3, z^* = 15$百元。

目标规划问题的提出

- 引例
  - 在实际决策时，往往要考虑市场等一系列其他条件，如：
    - (1) 力求使利润指标不低于15百元；
    - (2) 考虑到市场需求，I、II两种产品的产量需保持1:2的比例；
    - (3) A为贵重设备，严格禁止超时使用；
    - (4) 设备C可以适当加班，但要控制；设备B既要充分利用，又尽可能不加班，又要在重要性上设备B是设备C的3倍。

  这样在考虑决策时，便为**多目标规划问题**。目标规划方法是解决这类问题的方法之一。

目标规划的数学模型

- 基本概念
  - (1) 正、负偏差变量d^{+}、 d^{-}
    - 除决策变量x_j外，引入偏差变量，用来表示**实际值**与**目标值**之间的差异。
    - 正偏差变量d^{+}： 表示实际值超出目标值的部分
    - 负偏差变量d^{-}： 表示实际值低于目标值的部分
    - 由于实际值不可能既超过目标值同时又低于目标值，故两者之中必有一个为零，且当实际值与目标值恰好一致时，两者同时为零，因此均有

$$d^{+} \times d^{-} = 0$$
$$d^{+} \geq 0$$
$$d^{-} \geq 0$$

目标规划的数学模型

- 基本概念
  - (2) 绝对约束和目标约束
    - 绝对约束（硬约束）：是指必须严格满足的等式或不等式约束。
      - 比如：
        线性规划中的所有约束条件均为绝对约束；
        而不满足这些硬约束的解称为非可行解。

目标规划的数学模型

- 基本概念
  - (2) 绝对约束和目标约束
    - 目标约束（软约束）：是目标规划所特有的，是一种将<u>约束</u>和<u>目标</u>结合在一起的表达式。对那些不严格限定的约束，连同建模时拟达成的目标，均可通过目标约束来表达。
      - 比如，可把**约束右端项**看做要追求的目标值，在达成该目标值时允许发生正或负的偏差，引入正、负偏差变量后，相应约束即变为目标约束；
      - 此外，**线性规划的目标函数**，在给定目标值和引入正、负偏差变量后，也可变为目标约束。

目标规划的数学模型

- 基本概念
  - (3) 优先级（优先因子）与权系数
    - 优先级：在一个规划问题中常常有多个目标，在达成这些目标时有主次或轻重缓急的不同，称它们具有不同的优先级。
      - 优先级的不同可通过**优先因子**$P_1, P_2, \ldots$表示，并**规定**$P_l \gg P_{l+1}$，表示P_l比P_{l+1}有更高的优先级别。即首先保证P_1级目标的实现，此时不考虑次级目标；而P_2级目标是在实现P_1级目标的基础上实现的；依此类推。
    - 权系数：对于具有相同优先级的若干目标的差别，可以用不同的权系数ω_j.

目标规划的数学模型

- 基本概念
  - (4) 目标规划的目标函数
    - 目标规划的目标函数是可看作是综合各目标约束的正、负偏差变量和赋予相应的优先因子及权系数而构成的。
    - 每当一目标值确定后，决策者的要求是尽可能缩小实际值与目标值的偏差。因此，目标规划的目标函数形式为 $\min z = f(d^+, d^-)$，有如下三种基本形式：

      (1) 要求恰好达到目标值，但允许达不到目标值(即希望正负、负偏差变量都要尽可能小)，这时 $\min z = f(d^+ + d^-)$.

      (2) 要求不超过目标值，但允许超过目标值(即希望正偏差变量要尽可能小)，这时 $\min z = f(d^+)$.

      (3) 要求不低于目标值，但允许低于目标值(即希望负偏差变量要尽可能小)，这时 $\min z = f(d^-)$.

目标规划的数学模型

- 基本概念
  - 备注

将软约束表示为目标约束

Desired situation	Formulation of goal constraint	Contribution to the objective function
$LHS \leq RHS$	$LHS + d_\ell^- - d_\ell^+ = RHS$	Min d_ℓ^+
$LHS = RHS$	$d_\ell^-, d_\ell^+ \geq 0$	Min $d_\ell^- + d_\ell^+$
$LHS \geq RHS$		Min d_ℓ^-

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \le 16 \\ 5x_2 \le 15 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1^* = 3, x_2^* = 3, z^* = 15$百元

目标规划的数学模型

- 应用举例

例1中除必须满足**设备A的绝对约束**外, 其余目标按重要性程度的优先级为:

- P_1: 力求使利润指标不低于15百元;
- P_2: 产品I、II的产量尽可能保持1:2的比例;
- P_3: 设备B既要充分利用，又尽可能不加班，又要在重要性上设备B是C的3倍；设备C可以适当加班，但要控制。

对各目标约束中的正负偏差变量编序后，得到该例的**目标规划模型**:

$$\min z = \boxed{P_1 d_1^-} + \boxed{P_2(d_2^- + d_2^+)} + \boxed{3P_3(d_3^- + d_3^+) + P_3 d_4^+}$$

(或 $\min\{P_1 d_1^-, P_2(d_2^- + d_2^+), 3P_3(d_3^- + d_3^+) + P_3 d_4^+\}$)

三个层级目标也可分别列出

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 15 \\ 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ 4x_1 + d_3^- - d_3^+ = 16 \\ 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0\ (i = 1, \dots, 4) \end{cases}$$

绝对约束

目标约束

目标规划的数学模型

- 目标规划的一般数学模型

$$\min z=\sum_{l=1}^{L}P_l\sum_{k=1}^{K}(w_{lk}^{-}d_k^{-}+w_{lk}^{+}d_k^{+})$$

$$(\text{或}\ \min\{P_l\sum_{k=1}^{K}(w_{lk}^{-}d_k^{-}+w_{lk}^{+}d_k^{+}, l=1,\dots,L\})$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(=,\ge)b_i & (i=1,\dots,m)\\ \sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_j+d_k^{-}-d_k^{+}=g_k & (k=1,\dots,K)\\ x_j\ge 0 & (j=1,\dots,n)\\ d_k^{-},d_k^{+}\ge 0 & (k=1,\dots,K)\end{cases}$$

绝对约束

目标约束

其中：

P_l为第l级优先因子，$l=1,\dots,L$；

g_k为第k个目标的预期目标值，$k=1,\dots,K$；

w_{lk}^{-},w_{lk}^{+}为第l级优先因子P_l对应各目标的权系数。

目标规划数学模型的特点

	线性规划模型	目标规划模型
变量	只含决策变量	除决策变量外，还有偏差变量
约束条件	绝对约束(即：系统约束/硬约束)	绝对约束，目标约束
目标函数	为决策变量的函数	为偏差变量的函数，并按优先级、权系数区分重要程度
求解结果	寻找最优解（有可能无可行解）	寻找满意解

- 求解目标规划问题的思路：
  - 在综合考虑优先级和权系数的情况下，使所得到的结果离各项目标的偏差值(或其总和)为最小。
- 目标规划处理问题时的困难点：
  - 构造模型时需事先拟定目标值、优先级和权系数，而这些信息往往来自人的主观判断，带有模糊性，很难定出一个合理的绝对的数值。

课堂练习

- 某彩色电视机组装工厂，生产A、B、C三种规格的电视机。装配工作在同一生产线上完成，三种产品装配时的工时消耗分别为6小时、8小时和10小时。生产线每月正常工作为200小时；三种规格电视机销售后，每台获利分别为500元、650元和800元。每月销量预计为12台、10台和6台。该厂经营目标如下：
  - P1：利润指标为每月1.6×10^4元；
  - P2：充分利用生产能力；
  - P3：加班时间不超过24小时；
  - P4：产量以预计销量为标准；

为确定生产计划，试建立该问题的目标规划模型。

谢 谢！

Thank you!